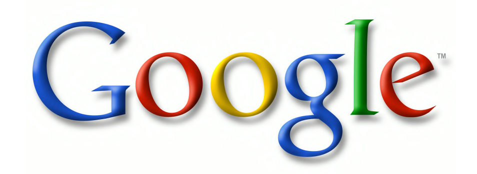
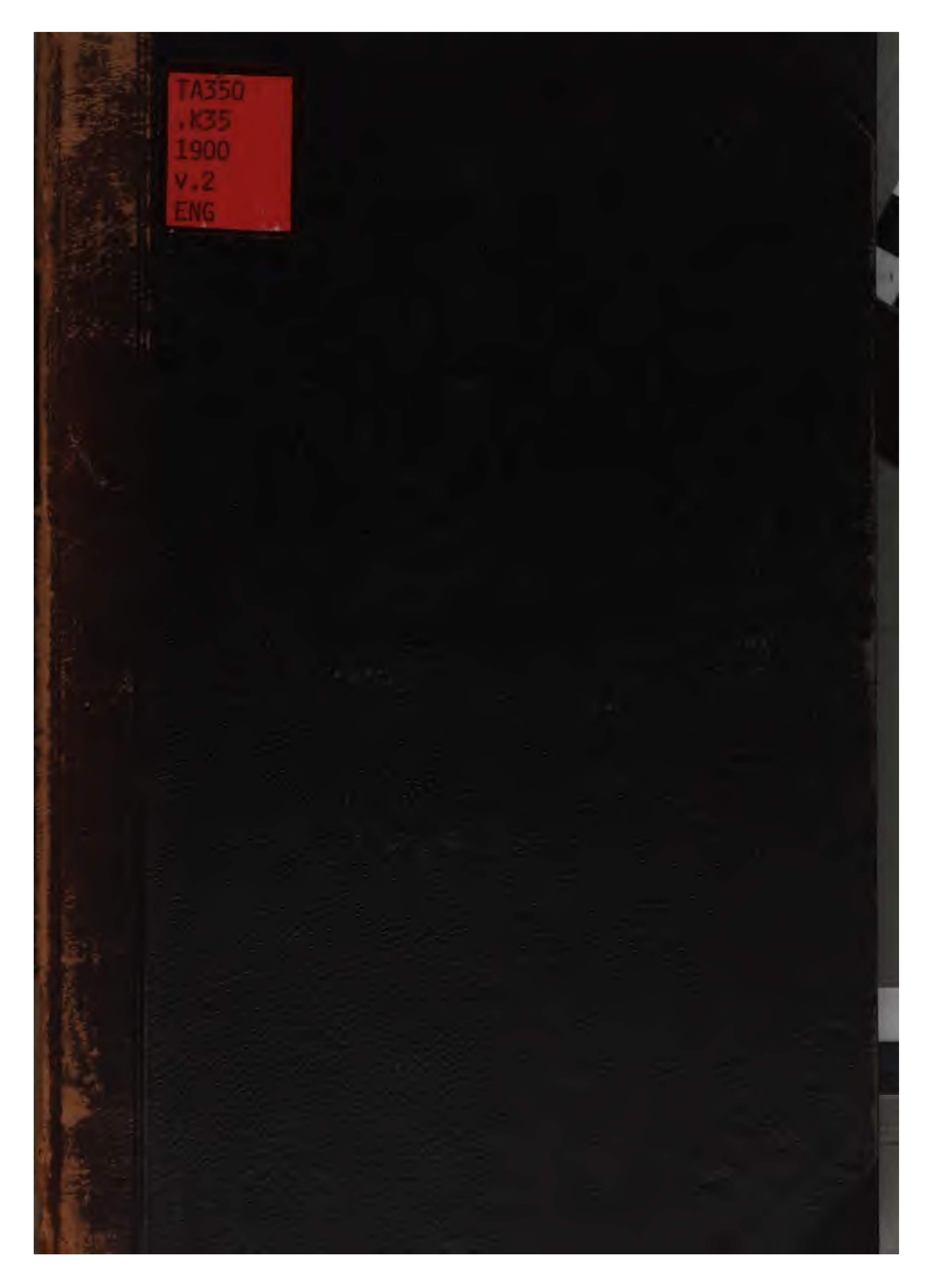
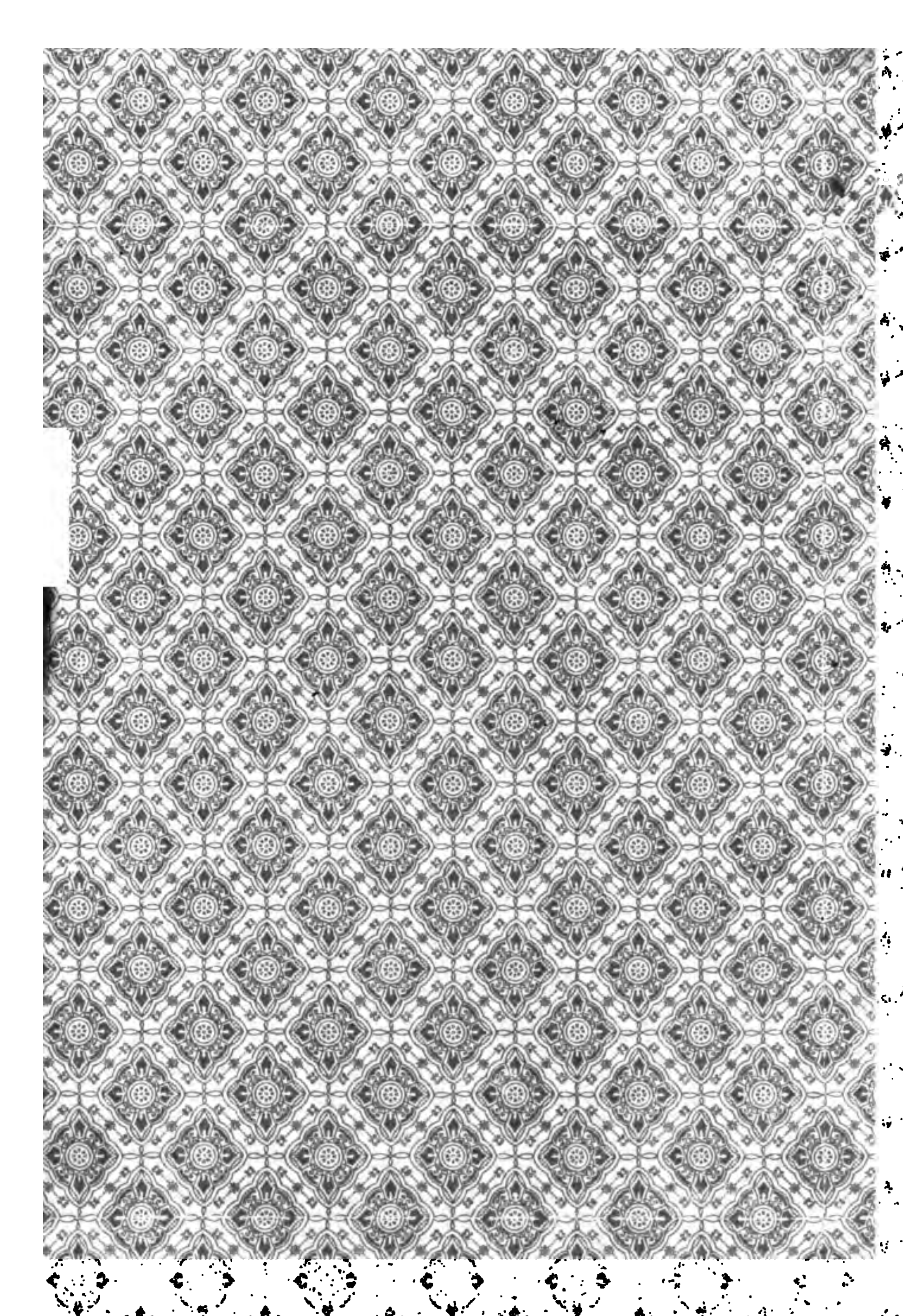
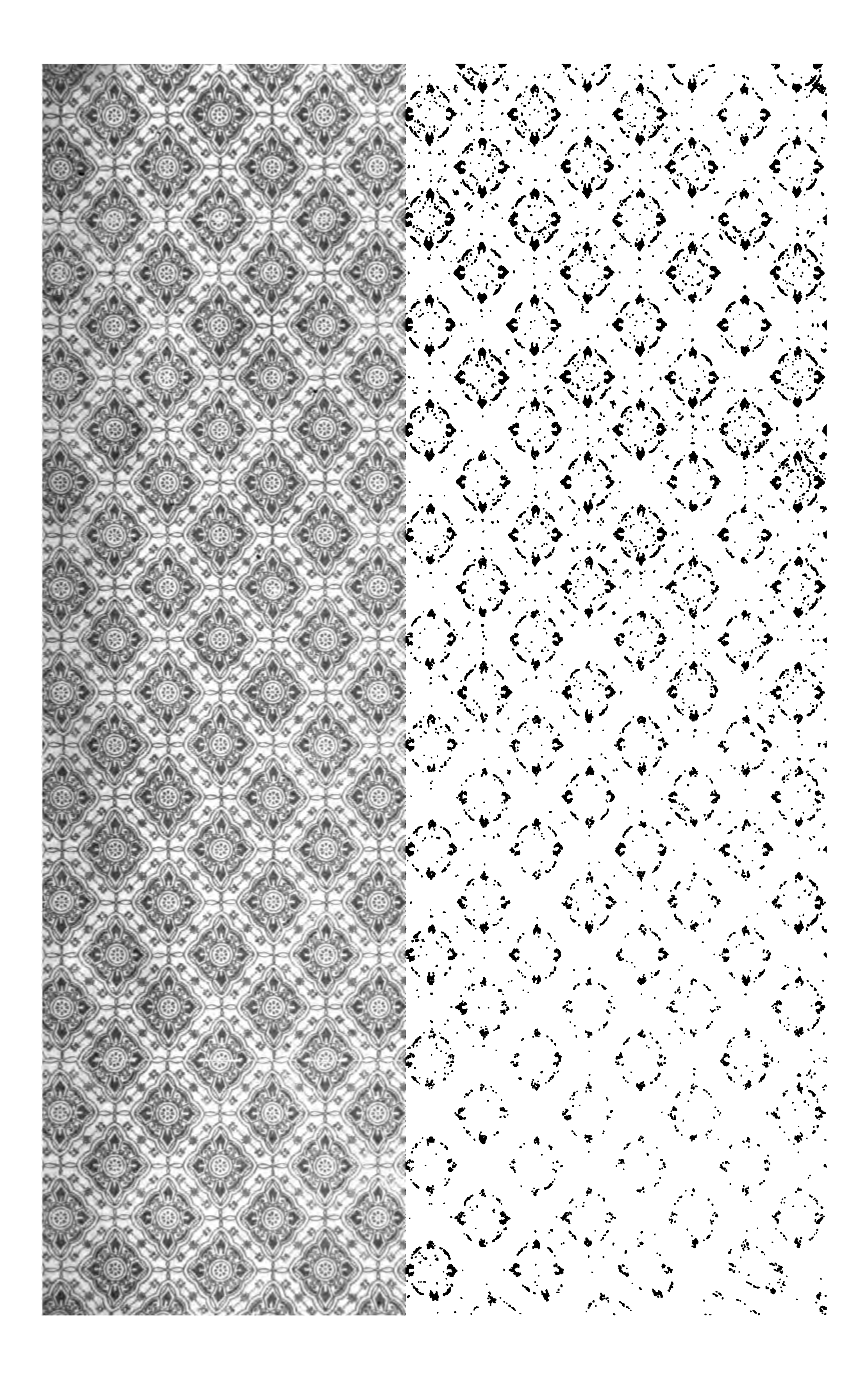
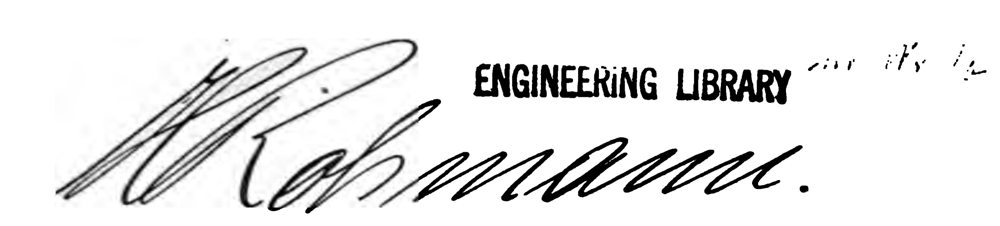



TA350
.K35
1900
v.2
ENG







Vorträge
über
Mechanik
als Grundlage für das
Bau- und Maschinenwesen.

Von

Wilh. Keck,
Geh. Regierungsrath,
Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.

Zweiter Theil:

Mechanik elastisch-fester und flüssiger Körper.

Zweite Auflage.

Mit 364 Holzschnitten.



Hannover.
Helwingsche Verlagsbuchhandlung.
1901.

Druck von Th. Schäfer, Hannover.

Vorwort zur ersten Auflage.

Der vorliegende zweite Band der „Vorträge über Mechanik“ behandelt die Mechanik der elastisch-festen und der flüssigen Körper. Der Inhalt des Buches weicht von dem Lehrgang an der Technischen Hochschule zu Hannover etwas ab; es wird nämlich im Sommer des ersten Studienjahres ausser der Mechanik elastisch-fester Körper noch das Gleichgewicht flüssiger Körper etwa in der Behandlungsweise des Buches erledigt, von der Bewegung flüssiger Körper können aber in der für das erste Studienjahr verfügbaren Zeit nur die einfachsten Fälle vorgetragen werden, und die eingehendere Behandlung erfolgt dann erst im Sommer des zweiten Studienjahres. Bei der Bearbeitung des Buches habe ich aber vorgezogen, die Mechanik flüssiger (und auch gasförmiger) Körper im Zusammenhange durchzuführen.

Auch in diesem Bande wurde auf die Beigabe zahlreicher vollständig durchgerechneter Beispiele besonderer Werth gelegt; denn den Studirenden der Technischen Hochschule wird die Mechanik, wenigstens soweit sie im ersten Jahre vorkommt, nur zum Zwecke der Anwendung gelehrt, und nur an gut gewählten Übungsaufgaben kann der Studirende diejenige Sicherheit erwerben, die erforderlich ist, wenn er nicht in den späteren Studienjahren bei der Berechnung seiner Entwürfe in Schwierigkeiten gerathen und kostbare Zeit verlieren soll. Den Fehlern, die von den Anfängern am häufigsten begangen werden, muss schon vom ersten Studienjahr an mit allen Mitteln vorgebeugt werden. Die Kenntnis dieser besonders häufigen Fehler kann man natürlich nur gewinnen und ihnen entgegenarbeiten, wenn man in besonderen Übungsstunden einfache Zahlenaufgaben rechnen lässt und daneben mit den Professoren derjenigen

Fächer, die sich auf die Mechanik stützen, stets in Fühlung bleibt und den auf das Fach bezüglichen Wünschen und Rathschlägen derselben nach Möglichkeit entgegenkommt.

Bei der Abfassung dieses Theiles wurden besonders folgende Werke benutzt: Lehrbücher der technischen Mechanik und der Ingenieur-Mechanik von A. Ritter; Elasticität und Festigkeit von C. Bach; Hydromechanik von M. Rühlmann; Theoretische Maschinenlehre von F. Grashof, 1. Band; Mechanik von Jul. Weisbach und die Berichte desselben Verfassers über seine Untersuchungen aus dem Gebiete der Hydraulik. Der Berechnung des Winddrucks und des Luftwiderstandes wurden die neuesten werthvollen Versuche von v. Loessl zu Grunde gelegt.

Zur Erleichterung der Übersicht und des Verständnisses der Formeln ist auch diesem Theil ein alphabetisches Verzeichnis der benutzten Buchstaben-Bezeichnungen und ein alphabetisches Inhaltsverzeichnis beigefügt.

Hannover, im Oktober 1897.

Keck.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Dass schon nach 3 Jahren eine 2. Auflage erforderlich wurde, zeugt für die Nützlichkeit des Buches. Leider ist dessen Verfasser, kurz nachdem er die Neubearbeitung dieses II. Theiles in Angriff genommen hatte, ganz unerwartet infolge eines Schlaganfalles gestorben.

Da wir durch unsere kollegialen Beziehungen zu dem Verfasser über die Art der Bearbeitung seiner Mechanik unterrichtet sind, haben wir es übernommen, diesen II. Theil, unter Benutzung der im Nachlasse vorgefundenen Notizen, im Sinne des Verstorbenen so zu bearbeiten, dass diese 2. Auflage noch als sein eigenes Werk anzusehen ist, — und zwar übernahm Lang: die erste Abtheilung „Mechanik der elastisch-festen Körper" und Arnold: die zweite Abtheilung „Mechanik der flüssigen Körper" — wobei Geh. Reg.-Rath Professor Riehn die Durchsicht der Abschnitte B bis D der ersten Abtheilung, und Professor Lang die Durchsicht der Punkte 7 bis 10 in Abschnitt B der zweiten Abtheilung, unterstützte.

Durch die Vollendung der 2. Auflage der Keck'schen „Vorträge über Mechanik" hoffen wir auch den Wünschen der Studirenden unserer Hochschule zu entsprechen.

So möge denn dieselbe dazu beitragen, das Andenken des zu früh geschiedenen bedeutenden Ingenieurs und hochgeschätzten Lehrers in Ehren zu halten.

Hannover, im März 1901.

G. Lang,
Professor.

H. Arnold,
Professor und Geh. Reg.-Rath.

Inhalt.

Erste Abtheilung.

Mechanik der elastisch-festen Körper.

B. Elastisch-feste Körper in Beschleunigungszuständen.

C. Formänderungs-Arbeit elastisch-fester Körper.

D. Stofs elastisch-fester Körper.

Zweite Abtheilung.

Mechanik der flüssigen Körper.

A. Gleichgewicht flüssiger Körper.

B. Bewegung flüssiger Körper.

Erste Abtheilung.

Mechanik der elastisch-festen Körper.

Einleitung.

Nichtstarre Körper und Massengruppen. Elastisch-feste Körper.

Einen festen Körper denken wir uns zusammengesetzt aus sehr vielen Massenpunkten, die so mit einander verbunden sind, dass sie gegenseitig Kräfte auf einander ausüben können. Diese Kräfte zwischen den einzelnen Massenpunkten eines und desselben Körpers heissen innere Kräfte, im Gegensatz zu den äusseren Kräften, welche von anderen Körpern herrühren und (mit Ausnahme der Massenkräfte S. 9) auf den Umfang des betrachteten Körpers einwirken.

Die Möglichkeit, Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten an einem Körper zusammenzusetzen und zu zerlegen, d. h. durch andere ohne Abänderung der Bewegung des Körpers zu ersetzen, ist im 1. Theile dieses Buches nur für völlig starre Körper bewiesen. Für diese benutzten wir (1. Theil, S. 96) den Erfahrungs-Grundsatz, dass zwei gleiche, in derselben Richtungslinie wirkende Kräfte entgegengesetzten Sinnes sich in ihrer Wirkung auf die Bewegung eines starren Körpers aufheben; daraus folgte die Zulässigkeit der Verschiebung des Angriffspunktes einer Kraft längs ihrer Richtungslinie. Auf diese Betrachtungen gründete sich die Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte zu einer Einzelkraft und einem Kräftepaare (1. Theil, S. 113), sowie die Lehre vom Gleichgewicht und den sechs Bedingungen für dasselbe (1. Theil, 2. Aufl., S. 148).

Eine Verlegung des Angriffspunktes einer äusseren Kraft hat stets Änderungen der inneren Kräfte des Körpers zur Folge. Auf diese kommt es aber in der Mechanik starrer Körper nicht an, weil starren Körpern eine unbegrenzte Festigkeit beigelegt wird und weil mit dem Auftreten innerer Kräfte keine Formänderungen, keine

sichtbaren Wirkungen verbunden sind. Anders ist es mit Körpern oder Massengruppen, welche nicht starr sind. Sind z. B. zwei Massenpunkte A und B, deren Masse je $= 1$ ist, durch eine starre Linie verbunden (Fig. 1) und wirken in A und B die beiden in der Richtungslinie AB liegenden Kräfte von 2 und 5 kg mit dem Sinne nach links bezw. rechts, so bringen diese an der starren Massengruppe eine Beschleunigung $3:2 = 1{,}5$ m/sek² hervor (1. Theil, 2. Aufl., S. 32 u. 144). Daraus bestimmt sich die Spannkraft S der starren Linie, denn am Punkte B muss $5 - S = 1 \cdot 1{,}5$, am Punkte A ebenso $S - 2 = 1 \cdot 1{,}5$ sein. Aus beiden folgt die Zugkraft $S = 3{,}5$ kg. Verlegt man die Kraft 2 kg von A nach B (Fig. 2), so dass nun in B eine Kraft von 3 kg wirkt, so ändert sich dadurch in dem sichtbaren Verhalten der Massengruppe nichts; die Beschleunigung bleibt $3:2 = 1{,}5$ m/sek² nach rechts. Es wird nun aber die Zugkraft S der Verbindungsgeraden 1,5 kg. Eine Verlegung der Kraft 5 kg (Fig. 1) von B nach A bedingt, wie man leicht erkennt, das Auftreten einer inneren Druckkraft $S = 1{,}5$ kg in der Verbindungsgeraden.

Fig. 1.

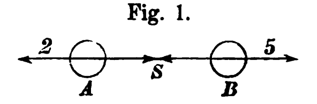
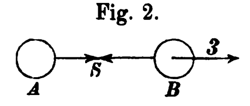


Fig. 2.



Sind die beiden Masseneinheiten A und B aber nachgiebig, etwa durch eine elastische Feder (Fig. 3), mit einander verbunden, die vor dem Auftreten der äusseren Kräfte völlig ohne Spannkraft war, so wird mit dem Beginne der Wirkung der äusseren Kräfte eine Verlängerung der Feder und erst in Verbindung damit das Auftreten einer veränderlichen Spannkraft S erfolgen. Im ersten Augenblick ist die Spannkraft noch Null; somit erfährt B eine Beschleunigung $= 5$ m/sek² nach rechts, A eine solche von 2 m/sek² nach links. Mit diesen Beschleunigungen gehen die Massenpunkte aus einander, und mit der Verlängerung der Verbindungsgeraden entsteht dann eine (meist sehr schnell) anwachsende Zugkraft S in der Feder. In dem Augenblicke, wo $S = 1$ kg geworden ist, hat B die Beschleunigung $= 4$ m/sek² nach rechts, A eine solche von 1 m/sek² nach links. Würde man die Kraft $= 5$ kg von B nach A verlegen (Fig. 4), so erführe

Fig. 3.

Fig. 4.

A zu Anfang eine Beschleunigung $= 3\,^{m}/_{sek^2}$ nach rechts, B keine Beschleunigung; A würde nach B hingedrängt, so dass die Feder zusammengedrückt und zur Äusserung einer veränderlichen, gegen beide Massenpunkte gerichteten Druckkraft veranlasst würde. In dem Augenblicke, wo die Druckkraft $S = 1\,^{kg}$, hätte B die Beschleunigung $= 1\,^{m}/_{sek^2}$ nach rechts, A die Beschleunigung $= 2\,^{m}/_{sek^2}$ ebenfalls nach rechts; A würde also noch nach B hingedrängt. Erst wenn die Druckkraft S auf $1{,}5\,^{kg}$ angewachsen ist, haben beide Punkte die übereinstimmende Beschleunigung $= 1{,}5\,^{m}/_{sek^2}$ wie bei starrer Verbindung. Man erkennt hieraus, dass eine Verlegung der einen Kraft von B nach A in der Bewegung der Punkte eine Änderung hervorbringt, dass also eine Zusammensetzung der beiden Kräfte, d. h. ihre Ersetzung durch eine einzige Kraft, nicht zulässig ist.

Es giebt auch Massengruppen, deren Punkte einer *Vergrösserung* des Abstandes von einander *keinen* Widerstand entgegensetzen. Dies ist z. B. annähernd der Fall bei flüssigen Körpern. Diese lassen sich ohne nennenswerthen Widerstand von einander trennen. Man kann sich solche Massengruppen grobsinnlich vorstellen durch einzelne Kugeln ohne Verbindung. Jede derselben wird nur durch die an ihr angreifenden äusseren Kräfte beschleunigt. Gleiche Kräfte an A und B (nach Fig. 5) angebracht, bewirken beschleunigte Trennung der Punkte, aber keineswegs Gleichgewicht.

Fig. 5.

Gleiche Zugkräfte, an den Enden einer biegsamen, aber undehnbaren Kette angebracht, heben sich auf, während bei einer Umkehrung der Kräfte zu Druckkräften ein Zusammenballen der Kette zu einem Knäuel, also keinenfalls Gleichgewicht der ursprünglich ausgestreckten Kette, entsteht.

Dennoch sind die Lehren von der Zusammensetzung und dem Gleichgewichte der äusseren Kräfte an starren Körpern auch für nicht starre Körper und Massengruppen von grosser Bedeutung, weil der Satz von d'Alembert (1. Theil, 2. Aufl., S. 141) und der Satz von der Bewegung des Schwerpunktes (1. Theil, 2. Aufl., S. 143) nicht allein für starre Körper, sondern allgemein für jede beliebige Massengruppe gelten. Fügt man also zu den äusseren Kräften $[K]$ einer Massengruppe die Gruppe der Ergänzungskräfte $[-mp]$ hinzu (1. Theil, S. 84), so genügen diese Kräftegruppen zusammen den

Gleichgewichts-Bedingungen starrer Körper. Der Schwerpunkt einer beliebigen Massengruppe aber bewegt sich so, als ob die gesammte Masse in ihm zu einem Punkte vereinigt wäre und sämmtliche äusseren Kräfte, parallel verschoben, an ihm angriffen. In den Fällen der Figuren 1—4 hat der Schwerpunkt der Gruppe der beiden Massenpunkte übereinstimmend die Beschleunigung $1{,}5\ ^{m}/_{sek^2}$ nach rechts.

Eine beliebige Massengruppe ist im Gleichgewichte, wenn jeder einzelne Punkt derselben ruht oder eine gleichförmig geradlinige Bewegung ausführt, d. h. wenn an jedem einzelnen Massenpunkte die Beschleunigung gleich Null ist. Dann fallen die Ergänzungskräfte sämmtlich fort, und es müssen die äusseren Kräfte der Massengruppe allein den Gleichgewichts-Bedingungen starrer Körper genügen. Hiernach gelten die Gleichgewichts-Bedingungen starrer Körper (1. Theil, 2. Aufl., S. 148) in unveränderter Weise auch für das Gleichgewicht nicht starrer Körper oder beliebiger Massengruppen.

Die festen Körper sind nicht starr, vielmehr erfahren sie unter Einwirkung äusserer Kräfte Formänderungen, die bei genügendem Anwachsen der Kräfte zur Zerstörung des Zusammenhanges führen können. Die Eigenschaft der festen Körper, unter Einwirkung äusserer Kräfte eine entsprechende Formänderung zu zeigen, die mit dem Aufhören der Kräftewirkung mehr oder minder wieder verschwindet, heisst Elasticität. Aufgabe der Mechanik elastisch-fester Körper ist die Ermittelung der inneren Spannungen und der Formänderung, welche an einem Körper durch äussere Kräfte hervorgebracht werden.

Zug- und Druck-Elasticität. Der einfachste Fall der elastischen Formänderung ist die Verlängerung eines geraden prismatischen Stabes durch eine in der Mittellinie des Stabes wirkende Zugkraft. Ist l die Länge des Stabes, F sein Querschnitt (beide im ungespannten Zustande gemessen), und wirken an den Endflächen, genau in der Mittellinie des Stabes, gleiche Zugkräfte K (Fig. 6), deren Grösse aber zunächst ganz allmählich, von Null beginnend, anwachsen soll, so kann man in den meisten Fällen annehmen,

Fig. 6.

K K

dass sich die Kraft K annähernd gleichmässig über den Querschnitt F vertheilt, so dass

1) $$\sigma = \frac{K}{F}$$

die auf die Flächeneinheit kommende Zugkraft ist. Diese Grösse σ heisst die **Zugspannung**. Ihrem Auftreten entspricht eine gewisse Verlängerung Δl des Stabes. (Das Zeichen Δ dient zur Bezeichnung kleiner Änderungen, so auch derjenigen Formänderungen, die mit der Anspannung der festen Körper verbunden sind.) Solange die Spannung σ gewisse, von der Art des Stoffes abhängige Grenzen nicht überschreitet, kann man Verlängerung und Spannung einander verhältnisgleich annehmen. In dieser Proportionalität zwischen Spannung und Formänderung besteht das Wesen der vollkommenen Elasticität.

Der Quotient $\frac{\Delta l}{l}$, das Verlängerungs-Verhältnis, oder die auf die Längeneinheit kommende Verlängerung heisst die **Dehnung** (specifische Verlängerung) ε, und man kann jene Proportionalität schreiben:

2) $$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E}.$$

Die Grösse E ist von dem Stoffe abhängig und heisst **Elasticitätsmafs** (Elasticitätsmodul). Für eine Spannung $\sigma = 1$ wird die Dehnung $\varepsilon = \frac{1}{E}$. Mithin ist das Elasticitätsmafs E der reciproke Werth der Dehnung für eine Spannung $\sigma = 1$. Weil Δl und l gleichartige Grössen (Längengrössen) sind, so ist ihr Verhältnis, die Dehnung ε, eine unbenannte Verhältniszahl; daher müssen σ und E (in Gl. 2) ebenfalls gleichartige Grössen sein. D. h. E hat die Bedeutung einer Spannung für die Flächeneinheit. Für $\sigma = E$ wird $\varepsilon = 1$ und $\Delta l = l$. Daher kann man auch sagen: das Elasticitätsmafs E ist diejenige Spannung, unter deren Einflusse der Stab sich um seine ursprüngliche Länge, d. h. auf das Doppelte seiner ursprünglichen Länge dehnen würde, wenn der Stoff bei einer solchen Dehnung noch vollkommen elastisch bliebe. In Wirklichkeit trifft letztere Voraussetzung höchstens bei

Kautschuk zu; andere Stoffe ertragen eine so bedeutende Dehnung bei weitem nicht.

Die Grenze der Spannung σ, bis zu welcher die Gleichung 2 der vollkommen elastischen Dehnung gilt, heisst die **Elasticitätsgrenze für Zug**; ihr Zahlenwerth soll mit z bezeichnet werden. Lässt man die Spannung allmählich wieder verschwinden, so verschwindet auch die Dehnung wieder; es tritt keine bleibende Formänderung ein, solange die Elasticitätsgrenze nicht überschritten worden ist.

Die in Gl. 2 ausgedrückte Proportionalität zwischen Dehnung und Spannung wurde von dem englischen Physiker Rob. Hooke (geb. 1635, gest. 1703) im Jahre 1679 in die Mechanik eingeführt und heisst darnach das **Hooke'sche Gesetz**.

Überschreitet die Spannung σ die Elasticitätsgrenze z, so wächst die Formänderung schneller als die Spannung, auch nimmt der Stab mit dem Verschwinden der Spannung nicht genau wieder die ursprüngliche Länge an; er hat vielmehr eine **bleibende Verlängerung** erfahren, er verhält sich nicht mehr vollkommen elastisch. Bei weiterer Zunahme der Spannung tritt schliesslich ein Zerreissen des Stabes ein. Diejenige Spannung, bei der dies erfolgt, heisst die **Zugfestigkeit** und soll mit Z bezeichnet werden.

Kehren die Kräfte K ihre Pfeilrichtung um, so werden sie zu Druckkräften (Fig. 7) und ertheilen dem Stabe, falls seine Länge nicht bedeutend im Verhältnisse zu den Querschnitts-Abmessungen ist, eine gleichmässige **Druckspannung**

1 a) $$\sigma = \frac{K}{F},$$

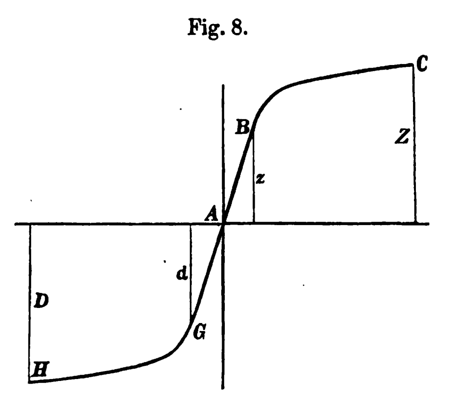
Fig. 7.

mit deren Auftreten eine Verkürzung verbunden ist. (Bei grösserer Länge erfolgt eine seitliche Ausbiegung mit verwickelteren Verhältnissen, die unter „Knickfestigkeit" (S. 64) behandelt werden.) Innerhalb gewisser Grenzen kann die für Verlängerung gegebene Gl. 2 auch für die Verkürzung durch Druck benutzt werden; es ist

2 a) $$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

Darin ist dann Δl eine negative Verlängerung, ε eine negative Dehnung, σ eine negative Spannung. (Es empfiehlt sich, in der Regel Druckspannungen als negative, Zugspannungen als positive Spannungen zu bezeichnen.) Zug- und Druckspannungen fasst man in der gemeinsamen Bezeichnung Längsspannung (Normalspannung) zusammen. Das Elasticitätsmafs E kann man für Zug und Druck gleich gross annehmen. Derjenige Spannungswerth, bis zu welchem die Verkürzung noch der Gleichung 2a folgt, ist die Elasticitätsgrenze für Druck; sie werde mit d bezeichnet. Die Druckspannung, bei der die Zerstörung erfolgt, ist die Druckfestigkeit D.

Fig. 8.



Trägt man die zusammengehörigen Spannungen und Dehnungen, wie sie sich bei Versuchen ergeben, als Ordinaten und Abscissen auf, so erhält man eine Schaulinie (Fig. 8), die Dehnungslinie, die für Schmiedeeisen ungefähr die Form $HGABC$ hat. Innerhalb des mittleren geraden Theiles GAB gelten die Gleichungen 2 und 2a.

Mit dem Auftreten der Zugspannungen sind neben den besprochenen Längsdehnungen auch noch Einschnürungen (Verminderung des Querschnittes) verbunden. Ebenso sind die durch Druck entstehenden Verkürzungen in der Längsrichtung von Stauchungen (Querschnitts-Vergrösserungen) begleitet. Diese Erscheinungen haben für die erste Einführung in das Verhalten der elastischen Körper keine besondere Wichtigkeit, finden aber in Keck's Vorträgen über Elasticitätslehre gebührende Berücksichtigung.

Diejenige Grenze, bis zu welcher die Dehnungen mit den Spannungen verhältnisgleich sind, wurde vorstehend Elasticitätsgrenze genannt und zugleich als Grenze bezeichnet, bis zu welcher bleibende Formänderungen nicht auftreten. In Wirklichkeit weicht das Verhalten der Körper von diesem ideellen Bilde mehr oder weniger ab, insofern jene beiden Grenzen nicht zusammenfallen. Hält man sich strenger an die Wirklichkeit, so bezeichnet man zweckmässig die erstere Grenze als Proportionalitätsgrenze, die zweite als Elasticitätsgrenze. Über diese Verhältnisse ist nachzulesen in C. Bach's Elasticität und Festigkeit. Das genannte Buch enthält auch Mittheilungen

über den Einfluss der Zeit auf die Formänderung und das Verschwinden derselben, über die s. g. elastische Nachwirkung, auf welche wir hier nicht eingehen wollen.

Was die Mafseinheiten anlangt, so behalten wir für die Kräfte das Kilogramm bei, wie im ersten Theile. Als Längeneinheit benützen wir in der Mechanik der elastischen Körper zweckmässig nicht das Meter, weil Elasticitäts- und Festigkeitsgrenzen für das Quadratmeter unbequem grosse Zahlen ergeben. Vielmehr wählen wir das Centimeter zur Einheit. Im Maschinenbau wird auch vielfach nach Millimetern gerechnet. Umrechnungen von Centimetern auf Millimeter oder auf Meter sind so einfach, dass es nur geringer Aufmerksamkeit bedarf, sich in dieser Beziehung vor Fehlern zu schützen. Freilich muss man sich zur Regel machen, in einem gegebenen Falle sämmtliche Mafse, also neben den Querschnitten besonders auch die Längen, durch dieselbe Einheit auszudrücken. In dieser Beziehung machen Anfänger häufig Fehler. Als Spannung hat eine Zahl nur Bedeutung, wenn die zugehörige Kraft- und Flächeneinheit bekannt sind. Eine Spannung von 700 $^{kg}/_{qcm}$ (d. h. 700 ^{kg} für das Quadratcentimeter) ist gleichbedeutend mit 7 $^{kg}/_{qmm}$, sowie mit 7000000 $^{kg}/_{qm}$.

Die freie Luft übt auf die von ihr berührten Körper einen Druck aus, welcher auf 1 ^{qm} in der Höhe des Meeresspiegels bei mittlerem Barometerstand etwa 10333 ^{kg}, mithin auf 1 ^{qcm} etwa 1,0333 ^{kg} beträgt. Da der Luftdruck mit zunehmender Höhe kleiner wird, so ist auch leicht eine Höhe zu finden (etwa 264 ^{m} über dem Meere), in welcher der Luftdruck im Mittel 1 $^{kg}/_{qcm}$ beträgt, und man hat es zweckmässig gefunden, für diesen Druck die Bezeichnung **Atmosphäre** (1 ^{at}) im Maschinenwesen allgemein einzuführen. Diese Bezeichnung empfiehlt sich auch für die Spannungseinheit (1 $^{kg}/_{qcm}$ = 1 ^{at}), wir drücken also die Werthe σ, z, d, Z, D, und E in Atmosphären (der Kürze wegen einfach „at" gesprochen und geschrieben) aus, mit der Bedeutung: Kilogramme für 1 ^{qcm}.

Die für eine Stoffgattung geltenden Elasticitäts- und Festigkeitszahlen E, z, d, Z und D sind natürlich je nach der Güte des gerade vorliegenden Körpers schwankend. In folgender Tabelle geben wir einige Mittelwerthe für die in den Beispielen vorkommenden Fälle.

Elasticitäts- und Festigkeitszahlen in ^{at}.

	Elasticitätsgrenze		Festigkeit		Elasticitätsmaſs
	Zug z	Druck d	Zug Z	Druck D	E
Gusseisen	600	1600	1300	7000	1 000 000
Stabeisen	1600	1600	3500	3500	2 000 000
Stahl	3000	3000	5000	6000	2 200 000
Gussstahl	4500	4500	7000	8000	2 200 000
Holz	250	170	800	500	120 000
Glas	340	1450	340	1450	1 000 000
Kautschuk	20	—	30	—	10

Für Gusseisen, natürliche und künstliche Steine sowie Kautschuk scheint E mit σ zu wechseln; auch fehlt für diese Stoffe eine strenge Elasticitätsgrenze. Für Holz wird häufig $E = 100000$ gesetzt. Bei Glas fallen Elasticitäts- und Festigkeitsgrenze zusammen, d. h. Glas bleibt bis zur Zerstörung vollkommen elastisch. Bekanntlich kommen ja beim Glase bleibende Formänderungen, z. B. Verbiegungen, in kaltem Zustand nicht vor.

Die Kräfte, welche auf einen Körper oder einen Theil desselben wirken, unterscheidet man in **Massenkräfte** und **Flächenkräfte.** Unter ersteren versteht man solche, die unmittelbar auf die Massentheilchen übertragen werden und auch der Masse verhältnisgleich sind; dazu gehören die Schwerkräfte, auch magnetische und elektrische Kräfte, sowie die Ergänzungskräfte ($-mp$, $-mr\omega^2$) (s. 1. Theil, 2. Aufl., S. 84, 88, 142). Die Flächenkräfte werden durch unmittelbare Berührung mittels der Flächen übertragen und sind von der Form: Flächengrösse mal Kraft für die Flächeneinheit. Zu diesen gehören namentlich die inneren Kräfte fester und flüssiger Körper.

A. Gleichgewicht elastisch-fester Körper.

I. Allgemeines.

Ein elastisch-fester Körper ist im Gleichgewichte, wenn seine sämmtlichen Punkte sich im Gleichgewichte befinden, und dies verlangt, wie bei starren Körpern, dass der Körper entweder ruht oder eine gleichförmige geradlinige Bewegung ausführt; auch darf

der Körper keine Formänderungen mehr erfahren, vielmehr muss die den inneren Spannungen entsprechende Form bereits vorhanden sein.

Ein solcher Gleichgewichtszustand liegt vor, wenn nach S. 4 die äusseren Kräfte des Körpers den Gleichgewichtsbedingungen für starre Körper genügen. Diese Gleichgewichts-Bedingungen werden auch zur Ermittelung der inneren Spannkräfte benutzt, indem man durch den Körper einen Schnitt führt und für einen der erhaltenen Abschnitte die Gleichgewichts-Bedingungen aufstellt. Denn es muss ja, wenn der ganze Körper sich im Gleichgewichte befindet, auch jeder Theil desselben im Gleichgewichte sein. Bei dieser Untersuchung muss man an der Schnittstelle den vorherigen Zusammenhang durch Spannkräfte ersetzen, die man daher auch als „Schnittkräfte“ bezeichnet hat. Die 2 Abschnitte, in welche der Körper durch den Schnitt zerlegt ist, besitzen gleiche Schnittflächen, und an jedem Flächentheilchen der einen Schnittfläche wirken Spannkräfte, die gleich gross, aber entgegengesetzt gerichtet sind, wie bei dem entsprechenden Flächentheilchen der Schnittfläche des anderen Körperabschnittes. Diese Spannkräfte, die für den unzertrennten Körper innere Kräfte bedeuten, gelten für die Betrachtung eines Körperabschnittes als äussere Kräfte und sind in den Gleichgewichts-Gleichungen mit aufzuführen.

Das Gleichgewicht ist nur möglich, wenn der Körper durch die äusseren Kräfte nicht zerstört wird, d. h. wenn die Spannung die Grenze der Festigkeit an keiner Stelle erreicht. Soll ein Körper aber dauernd im Gleichgewichte bleiben, so darf seine Spannung nirgends die Elasticitätsgrenze überschreiten. Es würden sonst bleibende Formänderungen entstehen, die gewöhnlich nicht zulässig sind. In den meisten Fällen der Anwendung ist die Belastung eines Körpers mehr oder weniger veränderlich. Die Erfahrung lehrt, dass, wenn ein Körper häufig über die Elasticitätsgrenze hinaus belastet wird, die Formänderungen allmählich wachsen und endlich zur Zerstörung führen.

Bei der Berechnung der „zulässigen Belastung“ eines Körpers oder der erforderlichen Abmessungen bei gegebener Belastung, darf man aber noch nicht einmal die Spannung an der Elasticitätsgrenze zu Grunde legen, sondern muss als zulässige Spannung einen kleineren Werth einführen, der meist nur aus der Erfahrung

gewonnen werden kann. Einerseits sind nämlich die Stoffe der Körper der Abnutzung, dem Rosten, der Fäulnis u. dgl. unterworfen und erleiden deshalb Einbusse an ihrer Festigkeit. Sodann aber sind die Theile eines Bauwerkes oder einer Maschine häufig Erschütterungen und Stössen ausgesetzt, welche Schwingungen der elastischen Körper zur Folge haben. Derartige Schwingungsbewegungen sind nun stets ungleichförmig, bedeuten daher Abweichungen vom Gleichgewichtszustande. Viele Maschinentheile führen auch planmässig beschleunigte Bewegungen aus. Die Spannungen, die in solchen Körpern wirklich auftreten, lassen sich häufig nur sehr schwer ermitteln. Man führt daher eine Berechnung unter Annahme des Gleichgewichts (eine statische Berechnung) aus, welche die Spannungen kleiner angiebt, als sie wirklich sind, welche also bei Zugrundelegung der Elasticitätsgrenze als zulässiger Spannung zu geringe Querschnitts-Abmessungen liefern würde. Den auf diese Weise entstehenden Fehler kann man dadurch wieder ausgleichen, dass man als die in die Rechnung einzuführende Spannung σ nicht die Elasticitätsgrenze, sondern nur den $n$ten Theil derselben annimmt. Die Zahl n nennt man dann die Sicherheit gegen Überschreitung der Elasticitätsgrenze. Wäre die auf solche $n$fach kleinere Spannung gegründete Rechnung richtig, so würde thatsächlich nur $^1/_n$ der Spannung an der Elasticitätsgrenze erreicht werden. In Wirklichkeit aber bezeichnet die Zahl $^1/_n$ nur den Grad der Genauigkeit der Rechnungsgrundlagen für eine Gruppe von Fällen. Die Zahl n ist durch die Erfahrung an die Hand gegeben und beträgt je nach der Art des Bau- und Maschinentheiles 1,6, 2, 2,5, 3, 4 u. dgl. Rechnet man mit diesen Sicherheitsverhältnissen, so kann man annehmen, dass die wirkliche Spannung im ungünstigsten Falle bis nahe an die Elasticitätsgrenze herantreten wird. Je genauer man einen Fall zu berechnen vermag, desto mehr kann sich die Zahl n der Einheit nähern. So pflegt man für Bauverbände aus Stabeisen, dessen Spannung an der Elasticitätsgrenze etwa 1600^{at} beträgt, 700 bis 1000^{at} als zulässige Spannung σ einzuführen, indem man annimmt, dass die wahren Spannungen 1,6 bis 2,3 Mal so gross ausfallen werden, wie die durch statische Berechnung gefundenen. In der Wahl dieser kleinen Spannung σ liegt also keineswegs eine übermässige Ängstlichkeit, die als Verschwendung getadelt werden könnte, sondern eine durch die Erfahrung als nothwendig

erkannte, gebotene Vorsicht, wenn man dem fraglichen Bauwerk einen langjährigen Bestand sichern und allzu umständliche genauere Rechnungen vermeiden will.

Wie gross die zulässige Spannung bei den verschiedenen Bau- und Maschinentheilen und den entsprechenden Stoffen gewählt werden darf, gehört weniger in den Rahmen der Mechanik, als in den der Lehre von den Bauverbänden und Maschinentheilen.

Beispiel 1: Eine Stange aus Stabeisen von 2^{m} Länge und $2^{cm} \times 10^{cm} = 20^{qcm}$ Querschnitt kann bei $\sigma = 700^{at}$ zulässiger Spannung eine Zugkraft von $20 \cdot 700 = 14000^{kg}$ aufnehmen. Die entsprechende Dehnung beträgt $\varepsilon = 700 : 2000000 = 7 : 20000 = 0{,}00035$. Will man die Verlängerung $\varDelta l$ in ^{cm} haben, so drücke man die Länge l in Centimetern $= 200^{cm}$ aus, um zu erhalten

$$\varDelta l = l \cdot \varepsilon = 200 \cdot 0{,}00035 = 0{,}07^{cm}.$$

Bis zur Elasticitätsgrenze würde der Stab durch eine Zugkraft $K = 20 \cdot 1600 = 32000^{kg}$ gespannt werden mit einer Verlängerung $\varDelta l = 0{,}07 \cdot {}^{16}/_{7} = 0{,}16^{cm}$. Zum Zerreissen würde eine Kraft von $20 \cdot 3500 = 70000^{kg}$ erforderlich sein.

Beispiel 2: Eine ursprünglich spannungslose runde Eisenstange von 2^{cm} Durchmesser wird an den Enden festgehalten und sodann um 20^{0} C. abgekühlt. Wäre die Stange frei, so würde sie bei einer Ausdehnungsziffer von $^{1}/_{80000}$ f. 1^{0} C. eine verhältnismässige Verkürzung $= 20 : 80000 = 1 : 4000$ erfahren; Diese Verkürzung muss, da die Enden festgehalten sind, durch eine gleichgrosse elastische Dehnung des Stabes $\varepsilon = 1 : 4000$ wieder ausgeglichen werden. Daraus entsteht eine Spannung

$$\sigma = E\varepsilon = 2000000 : 4000 = 500^{at}$$

und eine Spannkraft $K = \sigma F = 500 \cdot \pi = 1570^{kg}$.

2. Zugfestigkeit hängender Stangen. Druckfestigkeit stehender Säulen.

Bei lothrecht hängenden, oben befestigten Stangen wird die Spannung σ vom Eigengewichte beeinflusst. Wirkt an der Stange (Fig. 9) von überall gleichem Querschnitt F unten eine Zugkraft K, so wird die Stange erst im Gleichgewichte sein können, nachdem eine gewisse Verlängerung stattgefunden hat, die für die Rechnung aber ohne Wichtigkeit ist. Durchschneidet man die Stange in dem Abstande x vom unteren Ende und bringt an der Schnittstelle die Spannkraft σF an, so müssen K, σF und das Gewicht G des unteren Stangentheiles im Gleichgewicht sein. Ist γ die Dichte des Stoffes, so wird $G = \gamma F x$,

Fig. 9.

mithin $$\sigma F = K + \gamma F x, \qquad \text{oder}$$

1) $$\sigma = \frac{K}{F} + \gamma x.$$

Die stärkste Spannung findet sich am oberen Ende, also für $x = l$:

2) $$\sigma_1 = \frac{K}{F} + \gamma l.$$

Die Verlängerung kann, weil die Spannung σ veränderlich ist, nur durch Integration oder Flächenberechnung gefunden werden. An der beliebigen Schnittstelle beträgt die Dehnung $\varepsilon = \sigma : E$, daher die elastische Verlängerung des Theiles dx nach Gl. 2 S. 5

$$\varDelta\, dx = \frac{\sigma}{E} dx$$

und die Verlängerung der ganzen Stange

$$\varDelta l = \frac{1}{E}\int_0^l \sigma \cdot dx = \frac{K}{EF} l + \frac{\gamma}{E}\int_0^l x \cdot dx, \qquad \text{woraus}$$

3) $$\varDelta l = \frac{K}{EF} l + \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{l}{E}\left(\frac{K}{F} + \frac{\gamma l}{2}\right).$$

Bei mässigen Längen kann das zweite Glied vernachlässigt werden.

Beispiel: An einem Bergwerks-Gestänge von $l = 200^{\text{m}} = 20\,000^{\text{cm}}$ Länge (Stabeisen) wirke unten eine Zugkraft $K = 40\,000^{\text{kg}}$. Wegen der Bewegung des Gestänges möge die zulässige Spannung nur $\sigma_1 = 400^{\text{at}}$ betragen dürfen. Es soll der erforderliche Querschnitt F berechnet werden. Wenn 1 cbm Stabeisen 7800 kg wiegt, so ist für Centimeter $\gamma = 7800 : 100^3 = 0{,}0078$ zu setzen. Nun wird nach Gleichung 2

$$400\, F = 40\,000 + 0{,}0078 \cdot 20\,000\, F, \quad \text{also}$$

$$F = \frac{40\,000}{400 - 156} = 164^{\text{qcm}}.$$

Die Verlängerung beträgt (Gleichung 3)

$$\varDelta l = \frac{40\,000 \cdot 20\,000}{2\,000\,000 \cdot 164} + \frac{0{,}0078 \cdot 20\,000^2}{2 \cdot 2\,000\,000} = 2{,}44 + 0{,}78 = 3{,}22^{\text{ cm}}.$$

Am unteren Ende beträgt die Spannung nur

$$\sigma_0 = \frac{K}{F} = \frac{40\,000}{164} = 244^{\text{at}}.$$

Die Festigkeit wird daher nur ungleichmässig ausgenutzt und zwar um so ungleicher, je länger die Stange.

Soll die Festigkeit eines Gestänges völlig ausgenutzt werden, so muss der Querschnitt nach oben hin zunehmen. Das Gesetz für die Veränderlichkeit des Querschnittes eines Gestänges überall gleicher Sicherheit findet man nach Fig. 10. Am unteren Ende wirke eine Kraft K; diese verlangt bei einer überall gleichen Spannung σ einen Querschnitt $F_0 = K : \sigma$. In der Höhe x sei der Querschnitt F, mithin die Spannkraft σF. Für das Stück von der Länge x gilt dann die Gleichgewichts-Bedingung

Fig. 10.

$$\sigma F = G + K.$$

Hierin ist das Gewicht G der Stablänge x unbekannt. Die Aufgabe wird aber lösbar, wenn man obige Gleichung auf beiden Seiten nach x differentiirt. σ und K sind unveränderlich; F ändert sich um dF, G um dG, u. zw. ist dG das Gewicht einer Scheibe von der Höhe dx, d. h. $dG = \gamma F dx$. Mithin wird

$$\sigma dF = \gamma F \cdot dx.$$

Behufs der Integration dieser Gleichung muss man die Veränderlichen trennen, d. h. dF und F auf der linken Seite vereinigen, während dx auf der rechten bleibt, also $\frac{dF}{F} = \frac{\gamma}{\sigma} dx$. Das giebt $\mathfrak{l} F = \frac{\gamma}{\sigma} x + C$. Für $x = 0$ muss $F = F_0$ sein, mithin $\mathfrak{l} F_0 = C$.

Durch Abziehen folgt:

$$\mathfrak{l}\left(\frac{F}{F_0}\right) = \frac{\gamma}{\sigma} x \quad \text{und}$$

4) $$\frac{F}{F_0} = e^{\frac{\gamma}{\sigma} x}.$$

Nimmt man von beiden Seiten die Briggischen Logarithmen, so wird

5) $$\log \frac{F}{F_0} = \log e \cdot \frac{\gamma}{\sigma} x = 0{,}434 \frac{\gamma}{\sigma} x.$$

Wegen der Gleichheit der Spannung ist auch die Dehnung überall dieselbe, daher die Verlängerung $\Delta l = l \sigma : E$.

Beispiel 1: Für ein Gestänge von derselben Länge und Belastung wie S. 13 wird bei einer ganz gleichen Spannung $\sigma = 400^{at}$, $F_0 = 100^{qcm}$. Es ist $\gamma : \sigma = 0{,}0078 : 400 = 0{,}000\,019\,5$, wofür wir rund $0{,}000\,02$ setzen. Für

$$x = 5000^{cm} \text{ wird } \log \frac{F}{F_0} = 0{,}434 \cdot 0{,}1, \quad \frac{F}{F_0} = 1{,}105, \quad F = 110{,}5;$$

$$\text{für } x = 10000^{cm} \text{ wird } \log \frac{F}{F_0} = 0{,}434 \cdot 0{,}2, \quad \frac{F}{F_0} = 1{,}221, \quad F = 122{,}1;$$

$$\text{für } x = 15000^{cm} \text{ wird } \log \frac{F}{F_0} = 0{,}434 \cdot 0{,}3, \quad \frac{F}{F_0} = 1{,}35, \quad F = 135;$$

$$\text{für } x = 20000^{cm} \text{ wird } \log \frac{F}{F_0} = 0{,}434 \cdot 0{,}4, \quad \frac{F}{F_0} = 1{,}49; \quad F = 149^{qcm}.$$

Die Verlängerung wird

$$\Delta l = \frac{20000 \cdot 400}{2000000} = 4^{cm} \quad \text{(gegen } 3{,}22 \text{ S. 13).}$$

Leicht ergiebt sich hiernach auch das Gewicht G des Gestänges, weil die Spannkraft an dem oberen Querschnitte von 149^{qcm} den Werth $400 \cdot 149 = 59600^{kg}$ hat, der gleich $G + 40000^{kg}$ sein muss. Daher wird $G = 19600^{kg}$, während das Gestänge überall gleichen Querschnitts (S. 13)

$$164 \cdot 0{,}0078 \quad 20000 = 25584^{kg} \text{ wiegt.}$$

Alles für die Zugfestigkeit Gesagte gilt sinngemäss auch für die Druckfestigkeit, aber nur für Stäbe, bei denen keine Knickgefahr eintritt (vgl. S. 64).

Beispiel 2: Wie hoch darf ein prismatischer Steinpfeiler, der nur durch sein eigenes Gewicht belastet ist, werden, wenn 1^{cbm} 2000^{kg} wiegt und die Spannung nicht über 20^{at} betragen soll? Ist die Höhe x^{cm}, die Grundfläche F in ^{qcm} ausgedrückt, so wird, da $\gamma = 0{,}002$ für 1^{ccm}, das Gesammtgewicht

$$G = \gamma F x = 0{,}002 \cdot F x$$

und die ebenso grosse Spannkraft an der Grundfläche $K = 20\,F$; mithin wird, unabhängig von der Grösse des Querschnitts F,

$$x = 10000^{cm} = 100^{m}.$$

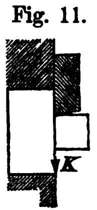
Der Querschnitt muss so gross gemacht werden, dass die Gefahr einer seitlichen Ausbiegung nicht entsteht. Die hierdurch bedingte Querschnittsform hängt aber von manchen Umständen ab, die sich nicht sämmtlich rechnungsmässig verfolgen lassen.

3. Schub- oder Scherfestigkeit.

Ist ein Körper fest eingespannt und wird auf den vorspringenden Theil (Zapfen) mittels eines scherblattartigen Körpers eine Kraft K ausgeübt (Fig. 11), so hat diese das Bestreben, den vorspringenden Zapfen von dem linksseitigen Theile des Körpers im Sinne der

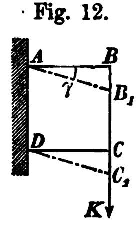
Kraft abzuschieben oder abzuscheren. Der Widerstand gegen Abscherung ist annähernd verhältnisgleich der abzuscherenden Fläche F und bei Eisen 0,6 bis 0,8 Mal so gross wie der gegen Zerreissen oder gegen Zerdrücken, wenn man von diesen Widerständen den kleineren einführt. Dem entsprechend wählt man die zulässige Scherbelastung bei Eisen nur = 0,6 bis 0,8 von der zulässigen Zug- oder Druckbelastung; bei Holz längs der Fasern nur = $^1/_6$ bis $^1/_8$.

Fig. 11.



Wirkt die Kraft nicht dicht an der Anhaftungsfläche, sondern in einem geringen Abstande l davon, so ist mit den Schubspannungen, die wir für die Flächeneinheit mit τ (tangential wirkend) bezeichnen wollen, eine Formänderung verbunden, welche darin besteht, dass die zur Anhaftungsfläche ursprünglich rechtwinkligen Geraden sich um den Winkel γ schiefwinklig stellen (Fig. 12), so dass das Rechteck $ABCD$ in das Rhomboid AB_1C_1D übergeht. Dieser Winkel γ heisst die Gleitung, indem man sich vorstellt, dass die einzelnen Querschichten $\parallel AD$ an einander entlang gleiten. Die Gleitung γ hat eine ähnliche Bedeutung wie die Dehnung ε bei der Wirkung von Zug und Druckspannungen. Wie $\varepsilon = \sigma : E$, so ist

Fig. 12.



1) $$\gamma = \tau : G,$$

also auch verhältnisgleich mit der Spannung τ. G ist wie E eine von dem Stoff abhängige Grösse, die auch mit E in einfacher Beziehung steht; es ist nämlich für isotrope Körper etwa

$$G = 0{,}4\,E$$

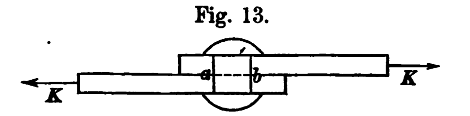
anzunehmen, u. zw. heisst G das Gleitmafs oder der Gleitmodul. Die Beziehungen zwischen Schubspannungen und Längsspannungen nebst den entsprechenden Formänderungen werden eingehender behandelt in Keck, Vorträge über Elasticitätslehre.

Gl. 1, welche dem Hooke'schen Gesetze für Längsspannungen (S. 6) entspricht, wurde 1837 von dem französischen Ingenieur de Saint-Vénant (geb. 1797, gest. 1886) angegeben.

Die Scherfestigkeit kommt besonders bei den Nietverbindungen in Frage. Will man zwei Stäbe, in denen Längszugkräfte K wirken sollen, in der einfachsten Weise durch Niete verbinden, so versieht man jeden Stab mit einem cylindrischen Loche, legt sie so auf

einander, dass die Löcher zusammenfallen und zieht einen Nietbolzen vom Durchmesser d hindurch (Fig. 13). Sollte nun die Vernietung durch Wirkung der Kräfte K zerstört werden, so müsste die in der Berührungsebene der Stäbe liegende Querschnittfläche ab, deren Grösse $F = {}^1/_4 d^2 \pi$ ist, abgeschert werden. Man kann daher setzen:

Fig. 13.



$$K = \tau F = \tau \cdot \frac{d^2 \pi}{4}.$$

Die Schubspannungen vertheilen sich **nicht** gleichmässig über die Abscherungsfläche; τ ist also nur eine **mittlere** Schubspannung. Die Erfahrung lehrt aber, dass man in Berücksichtigung der Reibung, die durch die Nietköpfe erzeugt wird, bei guten Nieten $\tau = 0{,}8\,\sigma$ setzen darf, wenn σ die kleinere der zulässigen Längsspannungen bedeutet. Ist für Stabeisen $\sigma = 700^{\text{at}}$, so kann $\tau = 560^{\text{at}}$ gesetzt werden.

Für $d = 2^{\text{cm}}$ und $\tau = 560^{\text{at}}$ wird $K = 1760^{\text{kg}}$.

Sollen die zu verbindenden Stäbe in gleicher Flucht liegen, so legt man auf beide eine sog. Lasche und verbindet diese mit beiden Stäben (Fig. 14). Die beiden Niete liefern aber keine grössere Festigkeit als das eine Niet in Fig. 13. Jeder Nietbolzen hat die Kraft K für sich allein aufzunehmen. Günstiger ist der Fall, wenn man die zu verbindenden Stäbe **beiderseits** mit Laschen versieht, also die sog. **doppelte Verlaschung** anwendet (Fig. 15). In diesem Falle widersteht jedes Niet gleichzeitig mit der Scherfestigkeit zweier Querschnitte; z. B. ab und cd. Denn um den linksseitigen Stab aus der Verlaschung herauszureissen, muss das linksseitige Niet an **beiden** Berührungsflächen zwischen dem Stabe und den Laschen abgeschert werden;

Fig. 14

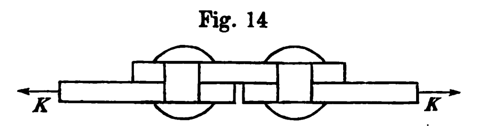
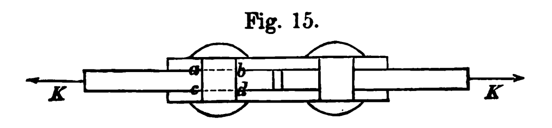


Fig. 15.



für den Fall der Zerstörung würde dann der mittlere Theil des Nietbolzens in dem herausgerissenen Stabe, seine äusseren Theile in den Laschen verbleiben. Ein solcher Nietbolzen, der mit der Festigkeit zweier Querschnittsflächen widersteht, heisst ein zweischnittiges Niet. Für Fig. 15 gilt also die Gleichung

$$K = 2 \cdot \tau \cdot {}^1\!/_4\, d^2 \pi.$$

Fig. 16.

Die Scherfestigkeit kommt auch in Frage bei dem Kraftaufwande zum Durchstossen, Durchlochen oder Durchpunzen eines Stabes oder einer Platte, behufs Herstellung (Stanzen) von Nietlöchern. Es wird dann durch Maschinenkraft der Stahlstempel S (Fig. 16) niedergedrückt, so dass er den cylindrischen Körper $abcd$ aus dem Stabe oder der Platte herausdrängt. Ist die Längsfestigkeit der Platte $Z = D = 3500^{\text{at}}$, so ist die Scherfestigkeit $0{,}8 \cdot 3500 = 2800^{\text{at}}$. Um ein Loch von $d = 2^{\text{cm}}$ Durchmesser durch die $h = 2^{\text{cm}}$ dicke Platte zu drücken, ist, weil die cylindrische Trennungsfläche $d\pi h = 2 \cdot \pi \cdot 2$, die Kraft

$$K = 4\,\pi \cdot 2800 = 35\,186^{\text{kg}} \text{ erforderlich.}$$

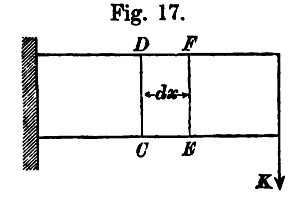
Genauere Untersuchungen zeigen, dass bei dem Widerstande der Niete wie auch beim Stanzen von Löchern noch verwickeltere Spannungsvorgänge auftreten, auf die hier nicht eingegangen werden kann.

4. Biegungsfestigkeit.

a) Grundgleichungen.

Ein Stab sei an dem einen (linken) Ende (Fig. 17) in einer Wand oder dergl. unwandelbar befestigt (eingespannt); am äusseren Ende wirke eine Kraft K, welche die Längenachse d. Stabes (d. h die Verbindungsgrade der Schwerpunkte der Querschnitte) rechtwinklig schneidet. Die durch K und die Längenachse bestimmte Ebene sei für den Stab oder Balken eine Symmetrie-Ebene; die Symmetrierichtung der Querschnitte sei hierzu rechtwinklig.

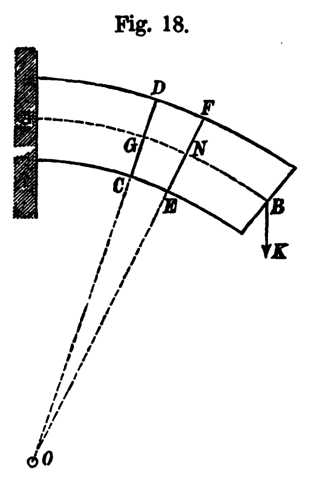
Fig. 17.



Die Erfahrung lehrt, dass der Stab unter der Last K sich biegt; zwei ursprünglich parallele Querschnitte CD und EF im

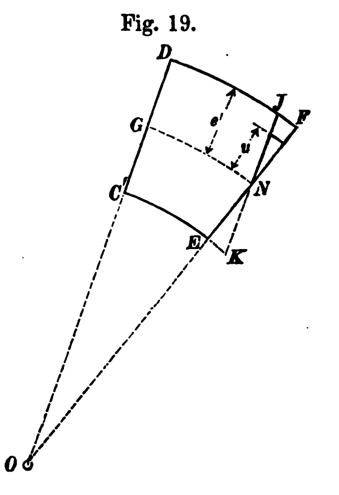
Abstande dx von einander, verdrehen sich gegen einander und schneiden sich in der Achse O rechtwinklig zur Bildebene (Fig. 18). Die oberen Schichten des Stabes haben sich verlängert, die unteren sich verkürzt. Dazwischen befindet sich eine Schicht $AGNB$, die keine Längenänderung erlitten hat, die sog. **neutrale Schicht**. Es wird vorausgesetzt, dass die Querschnitte CD und EF eben und rechtwinklig zur neutralen Schicht geblieben sind.*) Die einzelnen Schichten erfahren im Zusammenhange mit den Längenänderungen Zug- und Druckspannungen, die innerhalb der Elasticitätsgrenze den Dehnungen verhältnisgleich sind.

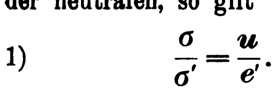
Fig. 18.



Zeichnet man das Längentheilchen $CDFE$ des Stabes besonders heraus (Fig. 19) und legt durch N eine Ebene $JK \parallel CD$, so stellen die Keile zwischen EF und JK die Längenänderungen der einzelnen Schichten des Stabtheilchens dar. Da nun die Schichten ursprünglich die übereinstimmende Länge $GN = dx$ hatten, so sind die Dehnungen, folglich auch die Spannungen der einzelnen Schichten, verhältnisgleich dem Abstande u derselben von der neutralen Schicht. Ist daher σ die Spannung im Abstand u, σ' die Spannung der äussersten Schicht im Abstand e' von der neutralen, so gilt

Fig. 19.





$$1) \qquad \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{u}{e'}.$$

*) Dies ist die „Hypothese von Jakob Bernouilli", v. J. 1705; s. a. S. 43; sie wurde von Navier als Ausgangspunkt der Biegungslehre 1821 in die technische Mechanik eingeführt und heisst daher wohl auch die „Navier'sche Hypothese". Weiteres hierüber s. z. B. bei Föppl, Technische Mechanik, Bd. III.

Zugleich ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke JFN und GNO

$$JF:GN = JN:GO.$$

$JF:GN$ ist aber $(= JF:DJ)$ die Dehnung $\sigma':E$ der obersten Schicht. Setzt man $GO = \varrho$, so geht die letzte Gleichung über in

$$\sigma':E = e':\varrho \quad \text{oder}$$

2)
$$\varrho = \frac{Ee'}{\sigma'}.$$

Durch Gl. 1 sind die Spannungen an den verschiedenen Stellen eines Querschnitts auf diejenige am oberen Rande zurückgeführt; es kommt nun darauf an, σ' aus der gegebenen Kraft K zu ermitteln. Dazu dienen die Gleichgewichts-Bedingungen. Betrachtet man das Stück rechts vom Schnitt EF in Fig. 18, so muss dieses den Gleichgewichts-Bedingungen genügen, wobei angenommen wird, dass die Kraft K ihre ursprüngliche (lothrechte) Richtung beibehält und im Punkte B angreift (Fig. 20). Da man die Form des gebogenen Balkens nicht kennt, so ist auch die Richtung der am Schnitt EF auftretenden Spannkräfte unbekannt. Weil aber in den meisten Fällen der Wirklichkeit die innerhalb der Elasticitätsgrenze liegende Biegung nur gering sein wird, so vernachlässigen wir die Formänderung bei der Aufstellung der Gleichgewichfs-Bedingungen und nehmen die Lage und Richtung der einzelnen Kräfte so, wie sie am ungebogenen Balken sich ergeben würde. In Fig. 21 stellt also der linke Theil das Stück des Balkens oder Stabes dar, welches im Gleichgewichte sein soll. Der rechte Theil zeigt den Querschnitt selbst.

Fig. 20

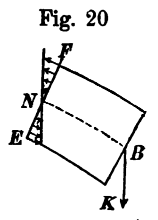
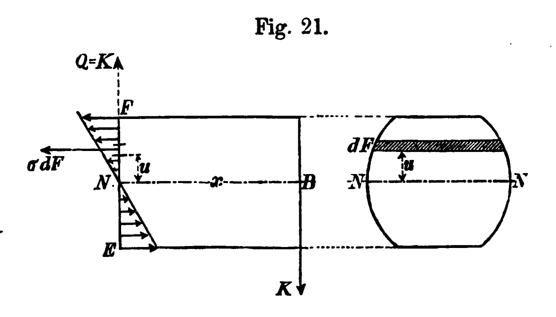


Fig. 21.



Nehmen wir aus dem Querschnitt im Abstand u von der neutralen Schicht NN einen Flächenstreifen dF heraus, so wirkt an diesem die Spannkraft $\sigma \cdot dF$, weil an ihm durchweg die Spannung σ auftritt. Derartige Spannkräfte kommen über die ganze Querschnitts-

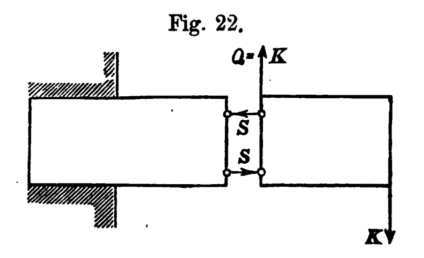
höhe vor, sind oben Zug-, unten Druckkräfte, und ihre Summe muss Null sein, weil sie die einzigen wagrechten Kräfte sind, die am betrachteten Balkenstücke (jetzt als äussere Kräfte) auftreten, also eine Summe = Null ergeben müssen. Wir haben also: $\int \sigma dF = 0$. Setzt man nun für σ nach Gleichung 1, S. 19 den Werth $\sigma = u \cdot \sigma' : e'$, so ergiebt sich, da σ' und e' von u nicht abhängig sind

$$\frac{\sigma'}{e'}\int dF \cdot u = 0, \text{ also } \int dF \cdot u = 0.$$

Dies bedeutet (1. Theil, 2. Aufl, S. 127), dass die Gerade NN im Querschnitt, von welcher aus die Abstände u gemessen sind, durch den Schwerpunkt der Querschnittsfigur gehen muss. Die Gerade NN, in welcher die neutrale Schicht einen Querschnitt schneidet, heisst die neutrale Achse oder die Spannungs-Nulllinie (weil an ihr die Spannung $\sigma = 0$ ist) oder kürzer die Nulllinie des Querschnitts. Die Gleichung der wagerechten Kräfte bedingt also, dass die Nulllinie durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht. Die Mittellinie des Stabes liegt in der neutralen Schicht desselben.

Die Gleichung der lothrechten Kräfte ist aber in Fig. 21 erst erfüllt, wenn die Kraft K durch eine gleiche, aufwärts gerichtete Kraft aufgehoben wird. Die Kraft K hat ausser der Biegung des Balkens auch das Bestreben, das abgeschnittene Stück längs des Schnittes nach unten zu verschieben; dem setzt sich an der Querschnittsfläche ein Schubwiderstand, eine sog. innere Querkraft $Q = K$, entgegen. Die aus Q sich ergebenden Schubspannungen sind in den einfacheren Fällen, wie sie in diesem Buche nur behandelt werden sollen, unbedeutend, weshalb wir uns um diese Querkraft Q hier nicht weiter kümmern werden. In Keck, Vorträge über Elasticitätslehre und über Graphische Statik findet man die näheren Untersuchungen über die Vertheilung der Querkraft.

Fig. 22.



Von der Nothwendigkeit der Querkraft $Q = K$ kann man sich auch noch mittelst der Fig. 22 überzeugen.

Führt man im Abstand x vom freien Ende einen Schnitt und rückt den Abschnitt von der Länge x ein wenig nach rechts, so kann man die

gesammte Zugkraft oberhalb der Nulllinie und die gesammte Druckkraft unterhalb derselben durch die Spannkräfte S zweier wagerechter Gelenkstangen ersetzen. Hierdurch sind aber die beiden Abschnitte noch nicht steif mit einander verbunden; die Gelenkstangen verhindern zwar eine Drehung des rechtsseitigen Theils (innerhalb der Zeichenebene), nicht aber eine Parallelverschiebung nach unten; hierzu ist noch eine nach oben gerichtete Querkraft $Q = K$ erforderlich.

In der Gleichung der Momente in Bezug auf die Nulllinie NN (Fig. 21) haben wir dann $K \cdot x$ als äusseres Moment; die innere Spannkraft $\sigma \cdot dF$ eines Querschnitts-Theilchens hat den Hebelarm u, daher muss $0 = K \cdot x - \int \sigma \cdot dF \cdot u$ oder nach Gl. 1, S. 19,

$$\frac{\sigma'}{e'} \int dF \cdot u^2 = K \cdot x \quad \text{sein.}$$

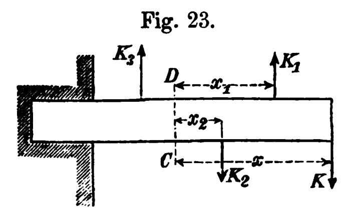
Die linke Seite dieser Gleichung ist die Momentensumme der an einem Querschnitt auftretenden inneren Spannkräfte oder das Spannungsmoment, während die rechte Seite das Moment der äusseren biegenden Kraft in Bezug auf die Nulllinie des Querschnitts ist. Dieses heisst das Biegungsmoment und wird mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet. $\int dF \cdot u^2$ bedeutet nach 1. Theil, 2. Aufl., S. 274 und 277 das geometrische Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf die Nulllinie. Die Momentengleichung nimmt dann die Form an:,

$$3) \qquad \frac{\sigma'}{e'} J = \mathfrak{M}.$$

Die durch die Richtungslinie der Kraft K und die Mittellinie des Stabes bestimmte Ebene, welche der Voraussetzung zufolge eine Symmetrie-Ebene des Stabes sein soll, heisst die Biegungsebene, weil die Mittellinie des Stabes auch nach der Biegung in ihr verbleibt. In diesem Falle steht die Nulllinie rechtwinklig zur Biegungsebene.

Treten in der Biegungsebene mehrere, zur Mittellinie des Stabes rechtwinklige Kräfte zugleich auf (Fig. 23), so ändert sich dadurch Nichts wesentliches. An irgend einer Schnittstelle CD vertheilen sich die Zug- und Druckspannungen wiederum nach dem Gesetze der Gl. 1 (S. 19), so dass die linke Seite der Gl. 3 dieselbe Form $\frac{\sigma' J}{e'}$ bekommt. Die

Fig. 23.



Querkraft Q an der Schnittstelle wird nunmehr entgegengesetzt der

algebraischen Summe der rechts vom Schnitte liegenden äusseren Kräfte:

$$Q = K - K_1 + K_2 = \Sigma K.$$

Das Biegungsmoment aber wird $\mathfrak{M} = Kx - K_1 x_1 + K_2 x_2 = \Sigma K \cdot x$, wobei sich das Summenzeichen Σ beidemal auf die Strecke vom Querschnitt bis zum rechtsseitigen Ende des Stabes erstreckt. Man kann dann sagen:

1. Die Querkraft Q des Querschnitts ist gleich der Summe der am abgeschnittenen Stück des Stabes wirkenden (lothrechten äusseren) Kräfte K.

2. Das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$ ist die Momentensumme der am abgeschnittenen Stücke des Stabes wirkenden äusseren Kräfte in Bezug auf die Nulllinie des Schnittes.

Nennt man die stärkste Druckspannung am unteren Rande σ'' und den Abstand von der Nulllinie e'', so ist wegen der Gl. 1 (S. 19)

$$4) \qquad \frac{\sigma''}{\sigma'} = \frac{e''}{e'}$$

mithin kann nach Gl. 3 auch geschrieben werden

$$5) \qquad \frac{\sigma''}{e''} J = \mathfrak{M}.$$

σ' und σ'' heissen die Randspannungen des Querschnitts.

Die linke Seite der Gl. 3: $\frac{\sigma'}{e'} J$, das sog. Spannungsmoment, enthält einen physikalischen Faktor σ', während der andere Faktor $J : e'$ nur von der Form und Grösse des Querschnitts abhängt. Diesen Faktor $\frac{J}{e'} = \mathfrak{W}'$ nennt man kurz das Widerstandsmoment des Querschnitts, u. zw. für die Zugspannung σ', während $\frac{J}{e''}$, ebenso das Widerstandsmoment $\mathfrak{W}''$ des Querschnitts für die Druckspannung σ'' ist. In den meisten Fällen der Anwendung liegt der Schwerpunkt des Querschnitts und damit die Nulllinie in halber Höhe; dann ist $e' = e''$, wofür wir dann einfach e setzen, ebenso $\mathfrak{W}' = \mathfrak{W}'' = \mathfrak{W}$. Es werden dann die Randspannungen $\sigma' = \sigma''$ (wofür wir σ schreiben), und man hat

$$\text{Randspannung } \sigma = \frac{\text{Biegungsmoment } \mathfrak{M}}{\text{Widerstandsmoment } \mathfrak{W}}.$$

Das geometrische Trägheitsmoment einer Fläche ist vom vierten Grade ($^{cm^4}$), das Widerstandsmoment also vom dritten Grade ($^{cm^3}$ oder ^{ccm}).

b) Widerstandsmomente verschiedener Querschnitte.

Für viele Fälle, namentlich für Holzbalken, ist der rechteckige Querschnitt (Fig. 24) angezeigt Bei diesem liegt die Nulllinie in der Mitte; das Trägheitsmoment ist (nach 1. Theil, 2. Aufl., S. 277) $J = \frac{F h^2}{12} = \frac{d \cdot h^3}{12}$; mithin ist, wegen $e = {}^1/_2 h$, das Widerstandsmoment des Rechtecks

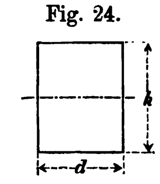


Fig. 24.

$$6) \qquad \mathfrak{W} = \frac{J}{e} = \frac{F \cdot h}{6} = \frac{d \cdot h^2}{6}.$$

Da nun der Aufwand an Stoff durch den Querschnitt F bedingt wird, so sind die Widerstandsmomente von Rechtecken gleichen Inhalts ihren Höhen h verhältnisgleich. Daher empfiehlt es sich, Balken, von denen man bestimmt annehmen kann, dass sie stets nur in lothrechtem Sinne belastet werden, hochkantig zu stellen und h gegen d möglichst gross zu nehmen. Eine obere Grenze für das zulässige Verhältnis $\frac{h}{d}$ ergiebt sich aus der geringen Scherfestigkeit des Holzes (vgl. Keck, Elasticitätslehre).

Für $d = 12$, $h = 24$ ist $\mathfrak{W} = {}^1/_6 \cdot 12 \cdot 24^2 = 1152$; legt man denselben Balken aber flach, so ist $d = 24$, $h = 12$ und $\mathfrak{W} = {}^1/_6 \cdot 24 \cdot 12^2 = 576$, d. h. halb so gross wie vorher, dem entsprechend ist auch die Tragfähigkeit nur halb so gross.

Bei gegebener Höhe $h = 2e$ liefert ein Flächentheil dF im Abstand u von der Nulllinie zum Widerstandsmomente den Beitrag $dF \cdot u^2 : e$. Die Flächentheile in der Nähe der Nulllinie geben daher nur wenig Beitrag; mithin ist es bei der Verwendung von Eisen, wo man in der Wahl der Form nicht sehr beschränkt ist, vortheilhaft, diese Flächentheile fortzunehmen und in möglichst weitem Abstande von der Nulllinie anzubringen. Vom hochkantigen Rechteck $ABCD$ (Fig. 25) gelangt man dann durch Verlegung der Flächentheile a nach a_1 zu dem I-förmigen Querschnitte.

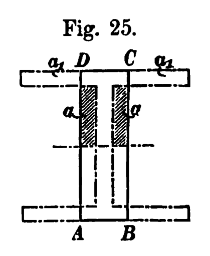


Fig. 25.

Bevor diese Form gewalzt wurde, hatte man schon Eisen der Form T, die man *T*-Eisen nannte; indem man sodann die I-Form als die Vereinigung zweier T-Eisen (T/⊥) ansah, führte man dafür den Namen Doppel-*T*-Eisen ein, verwendet dafür aber in der Schrift stets das Zeichen: I-Eisen.

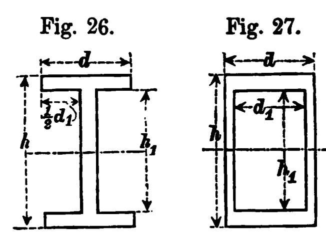
Zur Berechnung des Trägheitsmoments kann der I-Querschnitt (Fig. 26) als Unterschied zweier Rechtecke dh und $d_1 h_1$ behandelt werden, wenn man die Stärke der zur Verbindung der äusseren Theile dienenden Mittelwand $= d - d_1$ setzt. Daher ist

7) $J = {}^1/_{12}(d \cdot h^3 - d_1 \cdot h_1{}^3)$

und weil $e = {}^1/_2 h$:

8) $\mathfrak{W} = \frac{J}{e} = \frac{1}{6} \frac{d \cdot h^3 - d_1 \cdot h_1{}^3}{h}$.

Fig. 26. Fig. 27.



Die gleiche Formel gilt auch für das hohle Rechteck (Fig. 27)

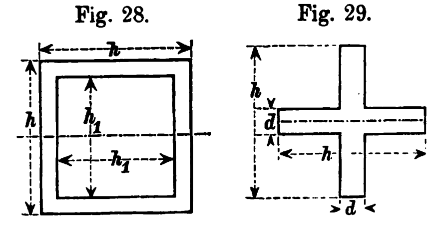
Soll der Stab oder Balken gegen wagerechte Kräfte ebenso widerstandsfähig sein wie gegen lothrechte, so ist das Quadrat oder noch besser das hohle Quadrat (Fig. 28) angezeigt; für das volle Quadrat wird

9) $\mathfrak{W} = \frac{J}{e} = \frac{h^3}{6}$;

für das hohle Quadrat wird

10) $\mathfrak{W} = \frac{J}{e} = \frac{1}{6} \frac{h^4 - h_1{}^4}{h}$.

Fig. 28. Fig. 29.



Zieht man in solchem Falle Querschnitte ohne Höhlungen vor, um den Farbenanstrich (als Schutz gegen Rost) leicht erneuern zu können, so kommt der kreuzförmige Querschnitt (Fig. 29) in Frage. Hierfür wird

$$J = \frac{1}{12}(d \cdot h^3 + h \cdot d^3 - d^4),$$

indem man erst den Beitrag der lothrechten Rippe anschreibt, dann den der wagerechten Rippe voll hinzufügt und den Beitrag des (hierbei doppelt gerechneten) Quadrates $d \cdot d$ abzieht. Es wird dann

11) $$\mathfrak{W} = \frac{1}{6} \frac{d \cdot h^3 + h \cdot d^3 - d^4}{h}.$$

Für gleichen Widerstand nach allen Richtungen eignen sich der Kreis und der Kreisring.

Für den Kreis vom Halbmesser r ist (1. Theil, 2. Aufl., S. 277)

12) $$J = \frac{Fr^2}{4} = \frac{r^4\pi}{4} \quad \text{und}$$

13) $$\mathfrak{W} = \frac{r^3\pi}{4}.$$

Für den Kreisring von den Halbmessern R und r ist

14) $$J = \frac{1}{4}(R^4 - r^4)\,\pi,$$

15) $$\mathfrak{W} = \frac{1}{4}\frac{(R^4 - r^4)\,\pi}{R}.$$

Bei den bis jetzt betrachteten Querschnittsformen war die Nulllinie eine Symmetrieachse, daher $e' = e''$ und auch $\sigma' = \sigma''$, d. h. die Zug- und die Druckspannung in den äussersten Lagen, die sog. „Randspannungen“ sind hierbei von gleicher Grösse. Bei Gusseisen, wo die Spannungen an der Elasticitätsgrenze $z:d$ sich verhalten wie $3:8$, ist es angemessen, den Querschnitt so anzuordnen, dass die Sicherheit in der gezogenen Randschicht ebenso gross wird wie in der gedrückten, dass also $\sigma' : \sigma'' = 3:8$, also auch $e' : e'' = 3:8$. Das führt auf unsymmetrische Formen, von denen wir beispielsweise den T-Querschnitt (Fig. 30) betrachten wollen. Die breite Seite (der Flansch) kommt hierbei nach der gezogenen (konvexen) Seite des gebogenen Stabes.

Fig. 30.

Sind x_1 und x_2 die Abstände der Theilschwerpunkte S_1 und S_2 der Rechtecke $d \cdot h$ und $d_1 \cdot h_1$ vom Gesammt-Schwerpunkte S, so ist $d \cdot h \cdot x_1 = d_1\,h_1\,x_2$ und $x_1 + x_2 = {}^1/_2(h + h_1)$; daraus

16) $$x_1 = \frac{d_1 \cdot h_1\,(h + h_1)}{2(d \cdot h + d_1 \cdot h_1)} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{d \cdot h\,(h + h_1)}{2(d \cdot \text{h} + d_1 \cdot h_1)}.$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Nulllinie wird dann als Summe der Beiträge der beiden Rechtecke

$$J = {}^1/_{12}\, d \cdot h^3 + d \cdot h \cdot x_1{}^2 + {}^1/_{12}\, d_1 \cdot h_1{}^3 + d_1 \cdot h_1 \cdot x_2{}^2,$$

wofür man (nach Teil 1, 2. Aufl., S. 279, Gl. 28) auch schreiben kann

17) $$J = \frac{1}{12}(d \cdot h^3 + d_1 \cdot h_1{}^3) + \frac{d \cdot h \cdot d_1 \cdot h_1}{d \cdot h + d_1 h_1}\left(\frac{h + h_1}{2}\right)^2.$$

Die zwei Widerstandsmomente

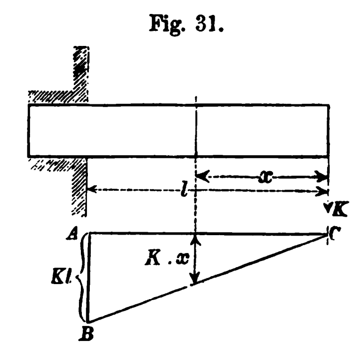
18) $$\mathfrak{W}' = J : e' \quad \text{und} \quad \mathfrak{W}'' = J : e''$$

verhalten sich demnach wie $e'' : e' = 8 : 3$.

c) Darstellung der Veränderlichkeit des Biegungsmomentes.

Für Balken oder Stäbe überall gleichen Querschnitts ist auch $\mathfrak{W}$ überall gleich, mithin die stärkste Spannung σ an verschiedenen Schnitten verhältnisgleich mit dem Biegungsmomente. Die Veränderlichkeit des letzteren pflegt man bildlich darzustellen.

Fig. 31.



Wird der eingespannte Balken (Fig. 31) am freien Ende von einer Last K ergriffen, so ist für einen beliebigen Schnitt im Abstand x von K das Biegungsmoment $\mathfrak{M}_x = K \cdot x$. Trägt man diese Werthe $\mathfrak{M}_x$ als Ordinaten zu den entsprechenden x auf und verbindet die Endpunkte durch eine Linie, so schliesst diese mit den Coordinaten die sogenannte Momentenfläche ein. Im vorliegenden Fall wird die Verbindungslinie der Endpunkte dargestellt durch die Gerade CB, und ACB ist die Momentenfläche. Das grösste Moment liegt daher an der Einspannungsstelle; es beträgt:

$$\mathfrak{M}_1 = K \cdot l.$$

Beispiel: Für einen Holzbalken von rechteckigem Querschnitte sei $l = 2^{\text{m}} = 200^{\text{cm}}$, $d = 12$, $h = 24^{\text{cm}}$; für Holz ist wegen der Spannungen an der Elasticitätsgrenze, der für Zug bei 250, für Druck bei 170^{at} liegt, die letztere massgebend; wählt man etwas mehr als zweifache Sicherheit, indem man als zulässige Spannung $\sigma = 75^{\text{at}} (< {}^1/_2 \cdot 170)$ einführt, so gilt für die zulässige Belastung K am freien Ende — vorerst unter Vernachlässigung des Eigengewichts des Balkens, vgl. S. 35 — die Gleichung

$$\sigma \cdot \mathfrak{W} = K \cdot l,$$

mithin, da nach S. 24, Gl. 6, $\mathfrak{W} = {}^1/_6 \cdot 12 \cdot 24^2 = 1152$ ist,

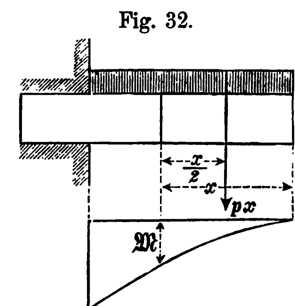
$$K = 75 \cdot 1152 : 200 = 432^{\text{kg}}.$$

Soll ein runder Schmiedeeisenstab bei 700^{at} stärkster Spannung dieselbe Last tragen, so gilt nach S. 26, Gl. 13, für seinen Halbmesser r die Gleichung

$$432 \cdot 200 = 700 \frac{r^3 \pi}{4}, \text{ woraus } r = 5{,}4^{cm}.$$

Ist der Stab oder Balken gleichmässig über seine Länge belastet mit p für die Längeneinheit (Fig. 32), und führt man einen Schnitt im Abstand x vom Ende, so hat die Gesammtlast der Strecke x die Grösse $p \cdot x$, sie kann als Mittelkraft im Abstand $^1/_2 x$ vom Schnitte vereinigt gedacht werden; somit wird

Fig. 32.



$$\mathfrak{M} = p \cdot x \cdot {}^1/_2 x = {}^1/_2 p \cdot x^2.$$

Die Darstellung davon ist eine Parabel mit lothrechter Achse, die am freien Ende des Stabes liegt. Der Parameter ist $1 : p$.

Greift am freien Ende des Stabes ein Kräftepaar vom Momente $K \cdot a$ (Fig. 33) an, so ist für jeden Schnitt des Stabes das Biegungsmoment $\mathfrak{M} = K \cdot a$, weil nach 1. Theil, 2. Aufl., S. 105 ein Kräftepaar in Bezug auf jeden Punkt seiner Ebene das gleiche Moment hat. In diesem Fall ist die Momentenfläche ein Rechteck.

Fig. 33.

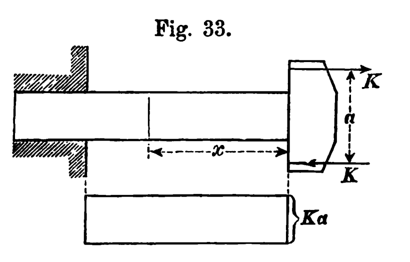


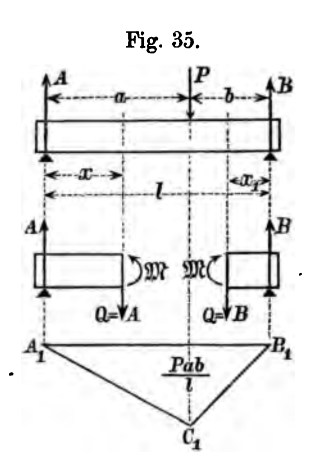
Fig. 34.

Greift das Kräftepaar $K \cdot a$ wie in Fig. 34 an, so wird für einen Schnitt zwischen B und C das Biegungsmoment $K \cdot x$ nur von der einen der beiden Kräfte K geliefert. Für einen Schnitt zwischen A und C aber liegen beide Kräfte K an dem abgeschnittenen Stücke und bilden ein Kräftepaar $\mathfrak{M} = K \cdot a$. Die Momentenfläche hat daher die unten in Fig. 34 gezeichnete Form.

d) Balken auf zwei Stützen mit einer Einzellast.

Ein Balken ruht mit seinen Enden auf 2 Stützen, deren Abstand l sei (Stützweite l, Fig. 35); er sei in den Entfernungen a und b von den Stützen durch ein Gewicht P belastet, wodurch an den Auflagern Widerstände A und B entstehen, die man als „Auflagerdrücke" oder als „Stützendrücke" bezeichnet. Sie ergeben sich sehr einfach (nach 1. Theil, 2. Aufl., S. 164), indem man die Momenten-Gleichung in Bezug auf B bezw. A aufstellt.

Fig. 35.



Es wird

$$A = P\frac{b}{l};\ B = P\frac{a}{l}.$$

Unter Einwirkung der Kräfte P, A und B muss der Balken im gebogenen Zustand im Gleichgewichte sein. Nach S. 20 vernachlässigen wir aber die Biegung bei der Aufstellung der Gleichgewichts-Bedingungen. Führen wir im Abstand x von A einen Schnitt, so müssen beide Theile des Balkens im Gleichgewichte sein. Welches der beiden Stücke wir betrachten, ist für das Ergebnis gleichgültig; der Einfachheit wegen wählt man meist dasjenige, an dem die wenigsten Kräfte vorkommen, in vorliegendem Falle das linkseitige, welches in der Figur besonders herausgezeichnet ist und an welchem nur der Stützendruck A als äussere Kraft wirkt. Die Kraft A verlangt eine innere Querkraft $Q = A$ (abwärts); diese bildet mit A ein Kräftepaar; das Biegungsmoment $\mathfrak{M} = A \cdot x$, mit dem Sinne rechts herum, ruft ein entgegengesetzt drehendes Spannungsmoment hervor. In dem Balken liegen also die gezogenen Schichten unten, da augenscheinlich die Durchbiegung nach unten erfolgt, und die gezogenen Theile des Stabs (Balkens) stets auf der convexen Seite der Biegung liegen. (Ein gusseiserner Balken unsymmetrischen Querschnitts müsste jetzt unten liegenden Flansch haben ⊥.)

Die Formel $\mathfrak{M} = Ax = P\frac{b}{l}x$ für das Moment gilt nur für Schnitte links von der Last. Sobald der Schnitt über die Belastungs-

stelle hinaus rückt, kommt plötzlich die Last P links vom Schnitte zu liegen, wodurch sich eine Unstetigkeit in der Veränderlichkeit des Momentes ergiebt. Für einen Schnitt rechts von der Last (im Abstand x_1 von B) betrachtet man einfacher das Stück rechts vom Schnitte. Dann wird $\mathfrak{M} = Bx_1 = P\frac{a}{l}x_1$. Die Momente werden wie S. 27 für beide Seiten des Balkens durch Gerade dargestellt. Für die Belastungsstelle selbst ($x = a$; $x_1 = b$) ergiebt sich von beiden Seiten der übereinstimmende Werth

1) $$\mathfrak{M}_1 = \frac{Pab}{l}$$

als das grösste Moment. Als Momentenfläche erhält man daher jetzt das Dreieck $A_1 C_1 B_1$ unten in Fig. 35. Zur Bestimmung dieses Dreiecks braucht man nur den linkseitigen Auflagerdruck $A = P \cdot b : l$ mit dem Hebelarm a zu multipliciren, um das Moment an der Belastungsstelle und damit den Punkt C_1 der Momentenfläche zu erhalten.

Liegt die Last in der Mitte, so ist $a = b = {}^1\!/_2\, l$ und

2) $$\mathfrak{M}_1 = {}^1\!/_4\, Pl;$$

diese Formel braucht man aber für die Anwendung nicht aus der allgemeinen Gleichung 1 abzuleiten, sondern sie kann unmittelbar aus der Fig. 35 abgelesen werden. Der Auflagerdruck ist für diesen Fall offenbar auf beiden Seiten je $= {}^1\!/_2\, P$, sein Abstand von der Last (der Balkenmitte) ${}^1\!/_2\, l$, also $\mathfrak{M} = A \cdot x = {}^1\!/_2\, P \cdot {}^1\!/_2\, l$ $= {}^1\!/_4\, Pl$.

Beispiel 1: Es sollen die Querschnitts-Abmessungen eines Holzbalkens bestimmt werden, der bei $3^{\text{m}} = 300^{\text{cm}}$ Spannweite und 75^{at} zulässiger Spannung eine Last von 2000^{kg} in der Mitte zu tragen hat. Es muss

$$\sigma \cdot \mathfrak{W} = \frac{P \cdot l}{4}, \text{ d. h. } 75 \times \frac{d \cdot h^2}{6} = \frac{2000 \cdot 300}{4},$$

also $d \cdot h^2 = 12\,000^{\text{cm}^3}$ sein. Setzt man nun etwa noch das Verhältnis $h : d = 2$ fest, so wird $h^3 = 24\,000$, mithin

$$h = 28{,}8^{\text{cm}}; \quad d = 14{,}4^{\text{cm}}.$$

Fig. 36.

Beispiel 2: Ein Balken, dessen Querschnitt in Fig. 36 gegeben, liege auf zwei Stützen in 4^{m} Abstand. Es soll für eine stärkste Spannung $\sigma = 700^{\text{at}}$ die zulässige Einzellast in der Mitte berechnet werden. Die Maſse in Fig. 36 sind ^{cm}. (Würde man versäumen, die Spannweite von 4^{m} in 400^{cm} umzuwandeln, so

erhielte man die Tragfähigkeit 100 mal zu gross; dieser Fehler kommt erfahrungsmässig bei Anfängern häufig vor.) Das Trägheitsmoment des Querschnittes ist in Bezug auf die Querachse

$$J = {}^1/_{12}\,(10{,}6 \cdot 24^3 - 9{,}73 \cdot 21{,}38^3) = 4287;$$

$$\mathfrak{W} = 4287 : 12 = 357.$$

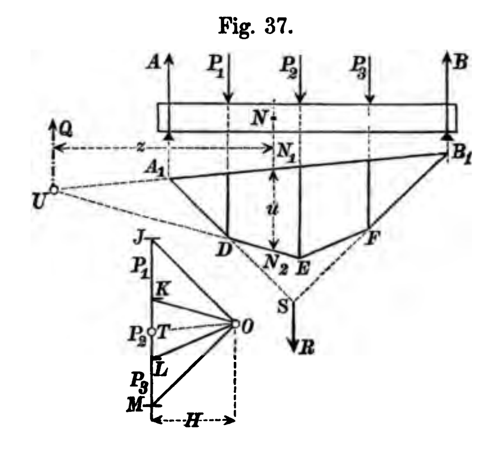
Mithin $\frac{P \cdot 400}{4} = 700 \cdot 357$ oder $P = 2499$ kg.

e) Balken auf zwei Stützen mit mehreren Einzellasten.

Für mehrere Einzellasten (Fig. 37) eignet sich besonders das zeichnerische Verfahren, namentlich für die Herleitung.

Im 1. Theil, 2. Aufl., S. 120, wurde gezeigt, wie man die Mittelkraft R paralleler Kräfte, hier der gegebenen Lasten, finden kann. Man setzt die Lasten P_1, P_2, P_3 nach beliebigem Mafsstabe zu einem Krafteck JM zusammen, wählt einen beliebigen Pol O und zeichnet, in einem beliebigen Punkte A_1 der linkseitigen Auflager-Lothrechten beginnend, ein Seileck A_1DEFB_1, welches die rechtsseitige Auflager-Lothrechte in B_1 schneidet. Durch den Schnittpunkt S der Verlängerungen der äussersten Seileckseiten A_1D und B_1F geht dann die Mittelkraft R der Lasten. Um nun die Auflagerdrücke A und B so zu bestimmen, dass sie R das Gleichgewicht halten, hat man (nach 1. Theil, 2. Aufl., S. 122) nur zu A_1B_1, der Schlusslinie des Seilecks, einen Parallelstrahl OT im Krafteck zu ziehen, dann ist T der Theilpunkt der Lasten; es ist TJ der Auflagerdruck A, MT der Auflagerdruck B.

Fig. 37.



Will man nun für einen beliebigen, etwa zwischen P_1 und P_2 liegenden Schnitt N das Biegungsmoment bestimmen, so hat man zu bedenken, dass das Biegungsmoment die Summe der Momente der beiden Kräfte A und P_1 (links vom Schnitt) in Bezug auf N

ist. Zu diesen beiden Kräften findet man aber leicht die Mittelkraft $Q = A - P_1 = TK$ im Krafteck mit dem Sinne aufwärts. Die Lage wird bestimmt durch den Schnittpunkt der einschliessenden Seileckseiten. Die einschliessenden Polstrahlen sind OT und OK, die hierzu parallelen Seiten des Seilecks sind $B_1 A_1$ und ED, welche sich in U schneiden. Nach dem Satze der Momente (1. Theil, 2. Aufl., S. 103) kann für die Momentensumme von A und P_1 das Moment ihrer Mittelkraft Q gesetzt werden, d. h. es ist

$$\mathfrak{M} = Q \cdot z.$$

Nun ist das Dreieck $U N_1 N_2 \backsim O T K$. Nennt man den rechtwinkligen Abstand des Poles O von der Lastlinie JM den Polabstand H, so gilt in den ähnlichen Dreiecken, dass die wagerechten und lothrechten Abmessungen einander verhältnisgleich sind. Oder $z : N_1 N_2 = H : KT$, mithin, wenn man $N_1 N_2 = u$ setzt und KT mit Q vertauscht:

$$z : u = H : Q, \text{ oder } Q \cdot z = H \cdot u.$$

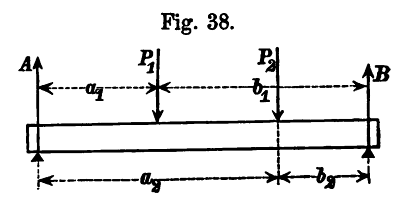
Es kann also das Biegungsmoment $\mathfrak{M} = Q \cdot z$ auch durch

$$\mathfrak{M} = H \cdot u \text{ ersetzt werden.}$$

Darin ist H der Polabstand des Kraftecks, d. h. eine beliebig gewählte Kraft, u die lothrechte Ordinate des Seilecks, von der Schlusslinie aus gemessen, u. zw. im gleichen Massstabe, nach welchem die Balkenlänge aufgetragen wurde.

Hiernach kann das Seileck $A_1 DEFB_1$ als Momentenfläche benutzt werden. Man braucht dessen Ordinaten nur mit der Kraft H zu multipliciren. Für die Anwendung empfiehlt es sich, als willkürliche Kraftgrösse H einen runden Werth zu wählen. Weil nun die Momentenfläche bei der Wirkung von Einzellasten ein Vieleck ist, so muss das überhaupt grösste Biegungsmoment, das an dem Balken auftritt, stets an einem Eckpunkte des Vielecks, d. h. unter einer Last, vorkommen.

Fig. 38.



Sind nur zwei Lasten P_1 und P_2 auf dem Balken (Fig. 38), so führt die Rechnung rascher zum Ziele, als vorstehende zeichnerische Behandlung.

Die Auflagerdrücke werden:

$$A = \frac{P_1 b_1}{l} + \frac{P_2 b_2}{l}; \quad B = \frac{P_1 a_1}{l} + \frac{P_2 a_2}{l}.$$

An der Last P_1 wird dann das Biegungsmoment

$$\mathfrak{M}_1 = A a_1 = \frac{P_1 a_1 b_1}{l} + \frac{P_2 a_1 b_2}{l},$$

an der Last P_2 aber

$$\mathfrak{M}_2 = B b_2 = \frac{P_1 a_1 b_2}{l} + \frac{P_2 a_2 b_2}{l}.$$

Jedes dieser Momente besteht aus 2 von einander unabhängigen Beiträgen, von je einer der Lasten herrührend, und da die Beziehungen für die Momente durch Einzellasten rein geradlinige sind, so muss diese Eigenschaft, die wir für die Momente an den Laststellen gefunden haben, auch für jeden anderen Schnitt gelten, wovon man sich auch leicht unmittelbar überzeugen kann. Bringt also irgend eine an bestimmter Stelle eines Balkens liegende Last an irgend einem Schnitte des Balkens ein Moment $\mathfrak{M}'$ hervor, so bildet dieses Moment $\mathfrak{M}'$ auch die Vergrösserung des Gesamtmoments des Balkens an demselben Schnitte, wenn jene Last zu anderen schon vorhandenen Lasten hinzutritt. Dieselbe Beziehung gilt also auch für die inneren Spannungen. Beim Vorhandensein mehrerer Lasten ist die Spannung an irgend einer Stelle des Balkens die algebraische Summe der Spannungen, die an der betreffenden Stelle von jeder einzelnen Last für sich allein hervorgebracht werden würde. Später werden wir noch sehen, dass Entsprechendes auch bezüglich der Formänderungen gilt. Dies Verhalten wird die **Übereinander-Lagerung oder Summirung der Wirkungen** genannt.

Fig. 39.

Beispiel: Bedeuten in Fig. 39 die Längenzahlen Centimeter, die Kräftezahlen Kilogramme, und soll das grösste Moment und danach die stärkste Spannung des Balkens vom Querschnitte 20 × 30 cm

berechnet werden, so braucht man die Momente nur für die beiden Laststellen zu ermitteln, da ausschliesslich an diesen das grösste Moment zu suchen ist. Es ist

$$A = 2000 \cdot \frac{400}{500} + 1500 \cdot \frac{200}{500} = 2200 \text{ kg};$$

$$B = P_1 + P_2 - A = 3500 - 2200 = 1300 \text{ kg}.$$

Das Moment an der linksseitigen Last ist

$$\mathfrak{M}_1 = 2200 \cdot 100 = 220\,000 \text{ cmkg},$$

das andere

$$\mathfrak{M}_2 = 1300 \cdot 200 = 260\,000 \text{ cmkg}.$$

Letzteres ist mithin das grössere. Leicht kann man die so bestimmte Momentenfläche auch durch Zeichnung finden, wenn man z. B. als Längenmafsstab 1 : 50 wählt, die Kräfte im Mafsstabe $1000 \text{ kg} = 2 \text{ cm}$ aufträgt und den Polabstand $H = 2000 \text{ kg} = 4 \text{ cm}$ benutzt. Die Ordinaten des Seilecks sind dann auf dem Längenmafsstabe zu messen. Das Widerstandsmoment des Querschnitts ist

$$\frac{20 \cdot 30^2}{6} = 3000 \text{ cm}^3, \text{ mithin}$$

$$\sigma = 260\,000 : 3000 = 86^2/_3 \text{ at}.$$

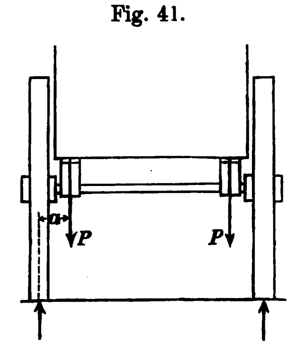
Über den Einfluss des Eigengewichtes s. S. 35.

Trägt ein Stab oder Balken auf zwei Stützen zwei gleiche Lasten P in symmetrischer Lage, wobei jede Last um a von dem nächsten Auflager absteht (Fig. 40), so muss jeder Stützendruck $= P$ sein. An einer Laststelle ist dann das Biegungsmoment $\mathfrak{M}_1 = P \cdot a$, und die Momentenfläche ein Trapez; zwischen den beiden Laststellen hat das Moment durchweg den gleichen Werth $P \cdot a$, und die Länge des Stabes ist ganz ohne Einfluss auf das grösste Moment.

Fig. 40.

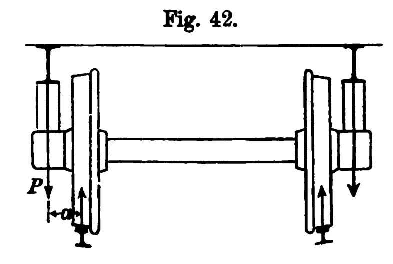
Solche Belastungsart kommt vor bei jeder Wagenachse. Bei der Achse eines Strassenfuhrwerks (Fig. 41) liefern die aussen liegenden Räder die aufwärts gerichteten Gegendrücke, während die Lasten P durch Federn auf die Achse übertragen werden. Bei den Eisenbahnwagen-Achsen (Fig. 42) liegen die Achslager, welche die Lasten übertragen, an den Enden, die Räder aber, welche den Gegendruck leisten, dazwischen; deshalb biegt sich solche Achse in der Mitte nach oben durch. Der Fall

Fig. 41.



der Fig. 40 kommt auch vor bei den Querträgern eiserner eingleisiger Eisenbahn-Brücken. Die Lasten P werden durch die Schienen übertragen; der Querträger stützt sich mit seinen Enden auf die beiden Hauptträger der Brücke. In allen diesen Fällen ist anzustreben, den Abstand a möglichst klein zu machen, damit das grösste Moment $P \cdot a$ klein werde.

Fig. 42.



f) Balken auf zwei Stützen mit gleichmässig vertheilter Last.

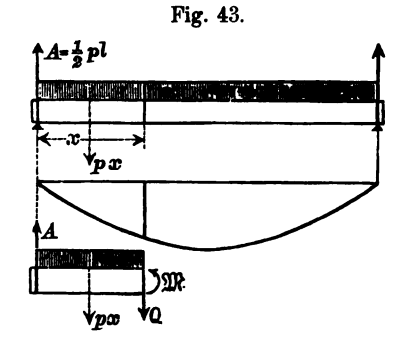
Eine gleichmässig vertheilte Belastung erfährt jeder Balken schon durch sein Eigengewicht. Bei der Berechnung wird ein Balken an und für sich als gewichtlos betrachtet und sein Eigengewicht wie eine fremde Last behandelt. In vielen Fällen ist das Eigengewicht so unbedeutend gegenüber den sonstigen Lasten, dass es vernachlässigt werden darf, wie bisher geschehen ist.

Ist p die Belastung der Längeneinheit, l die Spannweite (Fig. 43), so wird jeder Auflagerdruck $1/2\, p \cdot l$; für eine Schnittstelle im Abstand x von dem Auflager ist dann das Moment

1) $$\mathfrak{M} = \frac{p\,l\,x}{2} - p\,x \cdot \frac{x}{2} = \frac{p\,x\,(l - x)}{2}.$$

Eine Funktion, in der das Veränderliche in der Form $x\,(l - x)$ erscheint, wird (nach 1. Theil, 2. Aufl., S. 185) dargestellt durch ein Parabelsegment, welches die Weite l symmetrisch überspannt.

Fig. 43.



Das grösste Moment ergiebt sich für die Mitte, $x = 1/2\, l$, zu

2) $$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\,l^2}{8}.$$

Die Parabel hat den Parameter $1/p$. Setzt man die Gesammtlast des Balkens $p\,l = P$, so wird $\mathfrak{M}_{max} = 1/8\, P\,l$. Liegt die Last als Einzelgewicht in der Mitte, so ist nach S. 30 das grösste Moment $1/4\, P\,l$. Vertheilt

man also die Last gleichmässig über den ganzen Träger, so vermindert sich das grösste Moment auf die Hälfte, d. h. ein Balken kann doppelt so viel Last tragen, wenn dieselbe gleichmässig vertheilt ist, als wenn sie in der Mitte vereinigt wäre.

Solche gleichmässige Belastung kommt vor bei den Strassenbrücken mit unmittelbar aufliegender Fahrbahn. Die ungünstigste Belastung wird häufig durch sog. Menschengedränge gebildet, wobei die ganze Brückenbahn mit Menschen erfüllt ist. Bei Eisenbahnbrücken ist die Belastung freilich keine gleichmässig vertheilte, weil die stark belasteten Lokomotivräder die Brückenbahn in einzelnen Punkten berühren, die auch keineswegs sich in gleichen Abständen befinden. Gleichwohl werden auch Eisenbahnbrücken oft, wenigstens annäherungsweise, auf gleichmässige Belastung berechnet. Wir wollen nun ermitteln, welche gleichmässige Last ein Brückenträger von $10^{\mathrm{m}} = 1000^{\mathrm{cm}}$ Spannweite bei gegebenem Querschnitte erfahren darf. Der Balken oder Träger bekomme eine Höhe $= {}^1/_{10}$ der Weite, d. h. $h = 1^{\mathrm{m}} = 100^{\mathrm{cm}}$, und werde als sog. Blechträger ausgebildet, da man so grosse Träger nicht gut mehr aus einem Stücke walzen kann. Man sucht den Querschnitt des Balkens der ⌶-Form zu nähern (Fig. 45). Die lothrechte Wand möge 1^{cm} stark, 96^{cm} hoch sein. Darauf und darunter legt man sog. Gurten aus Flacheisen von 25^{cm} Breite und 2^{cm} Dicke. Um aber diese drei, eine ⌶-Form bildenden Theile fest mit einander zu verbinden, verwendet man sog. Winkeleisen in der Form der Fig. 44, welche zum Zusammennieten rechtwinklig an einander stossender Platten dienen. Der Querschnitt des hier zu verwendenden Winkeleisens ist durch die Maſse 8^{cm}, 8^{cm} und $1{,}2^{\mathrm{cm}}$ bestimmt; bei der Bezeichnung schreibt man diese kennzeichnenden Maſse wie Faktoren hinter einander ($\llcorner 8 \cdot 8 \cdot 1{,}2^{\mathrm{cm}}$), womit aber selbstverständlich keine Multiplikation angedeutet werden soll. Die lothrechten Schenkel der beiden Winkeleisen werden mit der lothrechten Wand, die wagerechten mit den Gurten durch Niete verbunden. Die Niete bedingen Nietlöcher von $2{,}2^{\mathrm{cm}}$ Durchmesser, deren Querschnitt bei der Berechnung des Trägheitsmomentes abgezogen werden muss. Die lothrechten und wagerechten Niete fallen nicht in den gleichen Querschnitt; daher brauchen wir nur die lothrechten Löcher abzuziehen. Hiernach ergiebt sich für die Berechnung des Trägheitsmomentes J der Querschnitt Fig. 45. Der Ansatz macht sich verhältnismässig bequem, wenn man die einzelnen Theile als Differenzen von Rechtecken ansieht.

Fig. 44.

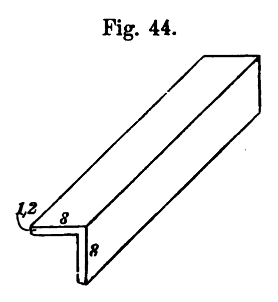
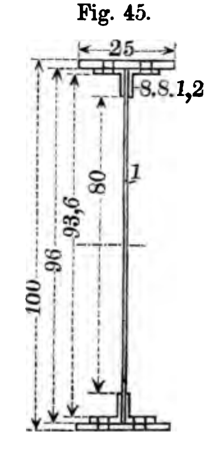


Fig. 45.



Die Mittelwand bildet ein volles Rechteck von 1 cm Breite, 96 cm Höhe und dem Trägheitsmomente . . . . . $^1/_{12} \cdot 1 \cdot 96^3 =$ 73 728.

Die lothrechten Schenkel denken wir uns bis zu den Gurten reichend und an einander geschoben; von dem Rechteck von 2,4 cm Breite und 96 cm Höhe denken wir uns ein solches von 80 cm Höhe abgezogen; mithin ist der Beitrag . . . . . $^1/_{12} \cdot 2{,}4\,(96^3 - 80^3) =$ 74 547.

Von jedem wagerechten Schenkel bleibt dann noch 8 — 1,2 — 2,2 = 4,6 cm Breite mit den Höhen 96 bezw. 93,6 cm, mithin ist der Beitrag . . . . $^1/_{12} \cdot 9{,}2\,(96^3 - 93{,}6^3 =$ 49 611.

Die Gurten endlich liefern . . $^1/_{12}\,(25 - 4{,}4)\,(100^3 - 96^3) =$ 197 870.

Das gesammte Trägheitsmoment ist 395 756.

Das Widerstandsmoment demnach

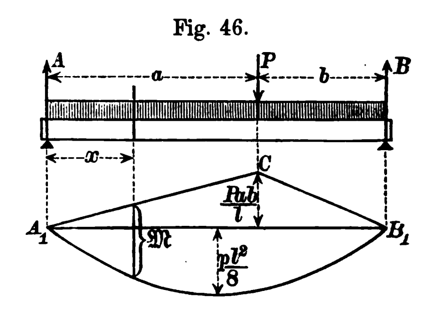
$$\mathfrak{W} = 395\,756 : 50 = 7915 \text{ cm}^3.$$

Ist p die zulässige Belastung auf 1 cm Länge, $\sigma = 700$ at die zulässige Spannung, so wird $p\,\frac{1000^2}{8} = 7915 \cdot 700$, mithin $p = 44$; die zulässige Gesammtlast pl einschliesslich des eigenen Gewichts ist also 44 000 kg.

g) Balken auf zwei Stützen mit gleichmässiger Belastung und mit Einzellasten.

Bei dem Zusammenwirken einer Einzellast mit stetiger Belastung addiren sich die für jeden Einzelfall bestimmten Momente. Man vereinigt sie am einfachsten, indem man die Momentenflächen der beiden Einzelfälle nach verschiedenen Seiten von der Achse $A_1 B_1$ (Fig. 46) aufträgt; die Summe beider Ordinaten, d. h. der lothrechte Abstand der Begrenzungslinien beider Momentenflächen giebt dann das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$. Die Figur lässt ohne Weiteres erkennen, dass, wenn $a > b$, das grösste Moment nicht auf der Strecke b liegen kann; denn von B_1 bis nach der Stelle C der Einzellast wachsen beide Momenten-Ordinaten. Geht man über C hinaus weiter nach links, so nimmt die obere Ordinate ab, die untere zu. Das grösste Moment liegt also entweder im Punkte C, oder zwischen C und der Mitte. Sind die Momentenflächen genau gezeichnet, so kann man das grösste Moment

Fig. 46.



leicht abgreifen. Allgemein findet man es durch Rechnung in folgender Weise:

Für irgend einen Schnitt der Strecke a (im Abstand x von A) ist das Moment

1) $$\mathfrak{M} = Ax - {}^1/_2 p x^2.$$

Diese Funktion erreicht einen Grösstwerth für

$$d\mathfrak{M} : dx = A - px = 0, \text{ d. h. für}$$

2) $$x = x_1 = \frac{A}{p}.$$

Da nun $A = \frac{pl}{2} + P\frac{b}{l}$, so ist

3) $$x_1 = \frac{l}{2} + \frac{Pb}{pl}.$$

also $x_1 > {}^1/_2 l$. Setzt man den Werth der Gl. 2 in Gl. 1 ein, so entsteht

4) $$\mathfrak{M}_{max} = \frac{A^2}{p} - \frac{A^2}{2p} = \frac{A^2}{2p}.$$

Diese Grösse ist aber nur gültig, so lange $x_1 \leqq a$, weil rechts von C die Momentengleichung 1 nicht mehr gilt.

Gl. 4 ist also nur benutzbar für $\frac{A}{p} \leqq a$, d. h. für $A \leqq pa$ oder

5) $$\frac{Pb}{pl} \leqq a - \frac{l}{2}.$$

Ist die Bedingung 5 nicht erfüllt, so giebt es für $\mathfrak{M}$ kein analytisches Maximum (mit einer Abgeleiteten = Null), sondern einen grössten absoluten Werth bei $x = a$, nämlich

6) $$\mathfrak{M}_1 = Aa - \frac{pa^2}{2} = ab\left(\frac{p}{2} + \frac{P}{l}\right).$$

Beispiel: Es sei $l = 500$ cm; $a = 300$ cm; $b = 200$ cm; $P = 100$ kg; $p = 2$ kg/cm. Dann ist $p \cdot {}^1/_2 l = 500$ kg; $P \cdot b : l = 40$ kg; also $A = 540$ kg;

$$\frac{Pab}{l} = 40 \cdot 300 = 12\,000 \text{ cmkg}.$$

$$\frac{pl^2}{8} = \frac{2 \cdot 500^2}{8} = 62\,500 \text{ cmkg}.$$

Nach Gl. 3 ist $x_1 = 250 + \frac{40}{2} = 270$ cm;

da dies $< a$, so giebt es ein

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{A^2}{2p} = \frac{540^2}{4} = 270^2 = 72\,900 \text{ cmkg}.$$

Ist aber unter sonst gleichen Verhältnissen $P = 1000^{\text{kg}}$, so wird

$$\frac{P \cdot b}{l} = 400; \quad A = 900^{\text{kg}}; \quad \frac{Pab}{l} = 400 \cdot 300 = 120\,000^{\text{cmkg}}.$$

$$x_1 = 250 + \frac{400}{2} = 450;$$

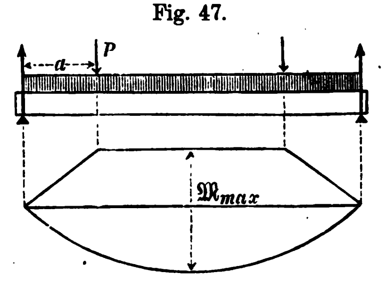
da dies $> a$, so findet sich das grösste Moment an der Stelle der Einzellast und beträgt nach Gl. 6:

$$\mathfrak{M}_1 = 300 \cdot 200 \left(1 + \frac{1000}{500}\right) = 180\,000^{\text{cmkg}}.$$

Durch Aufzeichnen der Momentenflächen und Abgreifen mit dem Zirkel erkennt man ebenfalls leicht die Stelle des grössten Momentes.

Sind zwei gleiche, symmetrisch liegende Lasten P nebst einer gleichförmig vertheilten Last p vorhanden (Fig. 47), so liefern die Einzellasten ein Trapez von der Höhe Pa, die gleichförmig vertheilte Last ergiebt eine Parabel von der Pfeilhöhe $\frac{1}{8} p l^2$ als Momentenfläche. Das grösste Moment liegt dann in der Mitte und hat den Werth

Fig. 47.



7) $$\mathfrak{M}_{max} = Pa + \frac{1}{8} p l^2.$$

h) Balken überall gleicher Sicherheit.

Bei einem prismatischen Balken ist die stärkste Spannung σ eines Querschnitts verhältnisgleich mit dem Biegungsmomente; ist letzteres also veränderlich, so wird die Festigkeit nur ungleichmässig ausgenutzt. Soll die stärkste Spannung σ in sämmtlichen Querschnitten des Stabes die gleiche sein, so muss das Widerstandsmoment $\mathfrak{W}$ jedes Querschnitts verhältnisgleich mit seinem Biegungsmoment $\mathfrak{M}$ sein. Ist $\mathfrak{M}_1$ das Biegungsmoment an einer bestimmten Stelle (etwa das grösste), $\mathfrak{W}_1$ das Widerstandsmoment an dieser Stelle, so muss sein:

Fig. 48.

1) $$\mathfrak{W} : \mathfrak{W}_1 = \mathfrak{M} : \mathfrak{M}_1.$$

Ist der Balken eingespannt (Fig. 48) und am freien Ende durch K belastet, so ist $\mathfrak{M} : \mathfrak{M}_1 = x : l$, mithin muss dann für überall gleiche Sicherheit

2) $$\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}_1} = \frac{x}{l} \quad \text{sein.}$$

Je nach der Wahl der Querschnittsform sind aber unendlich viele Lösungen der Aufgabe möglich. Hier soll nur der rechteckige und der Kreisquerschnitt behandelt werden.

I. Rechteckiger Querschnitt.

An beliebiger Stelle sei die Breite des Querschnitts $= u$, seine Höhe $= v$; für $x = l$ werde $u = d$ und $v = h$; dann ist $\mathfrak{W} = \frac{1}{6} u \cdot v^2$; $\mathfrak{W}_1 = \frac{1}{6} d \cdot h^2$, mithin nach Gl. 2

3) $$\frac{u \cdot v^2}{d \cdot h^2} = \frac{x}{l}.$$

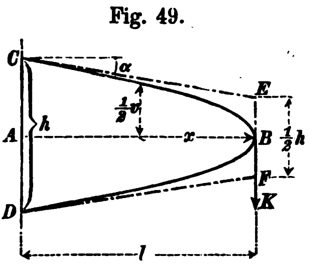


Fig. 49.

Nun kann man aber hierfür sehr verschiedene Balkenformen erhalten, je nach den weiteren Forderungen, die man stellt; es mögen hier drei solche Fälle besprochen werden:

α) Bei überall gleicher Breite $u = d$ wird

4) $$v^2 : h^2 = x : l.$$

Trägt man von der Mitte aus $\frac{1}{2} v$ nach oben und nach unten hin auf, so ergiebt sich ein parabolischer Aufriss CDB (Fig. 49). Die Neigung der Parabel an beliebiger Stelle ist $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} dv : dx$, Für $x = l$ sei $\varphi = \alpha$. Nach Gl. 4 wird

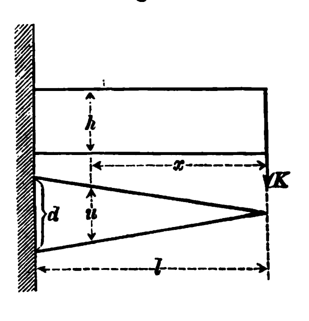
$$2 v \cdot dv = \frac{h^2 dx}{l}, \text{ mithin}$$

$$\frac{1}{2} \frac{dv}{dx} = \frac{1}{4} \frac{h^2}{vl} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Für $x = l$ wird $v = h$ und daher $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4} \frac{h}{l}$. Legt man also in C, B und D Berührungsgeraden an die Parabel, so bekommt man das Trapez $CEFD$, wobei $EF = h - 2 l \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} CD$. Bei überall gleichem Querschnitte $d \cdot h$ ist der Rauminhalt des Balkens $d \cdot h \cdot l$, bei der parabolischen Begrenzung $\frac{2}{3} d \cdot h \cdot l$, während die Umschliessungsform $CEFD$ den Inhalt $\frac{3}{4} d \cdot h \cdot l$ hat. Die parabolische Form genügt wohl für die Zug- und Druckspannungen. nicht aber für die Schubspannungen. Denn auch an dem Ende B,

wo der Querschnitt $= 0$ ist, herrscht eine Querkraft K, die eine gewisse Querschnittsfläche verlangt. Daher darf man in Wirklichkeit der parabolischen Form am freien Ende nicht ganz folgen. In so fern ist die trapezförmige Umschliessung besser als die Parabelgestalt.

Fig. 50.

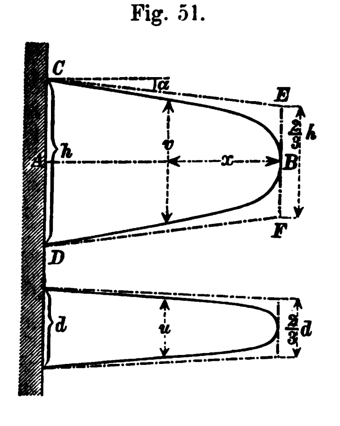


β) Giebt man dem Balken überall gleiche Höhe $v = h$, so wird aus Gl. 3:

5) $$u : d = x : l,$$

d. h. der Grundriss wird nunmehr ein Dreieck (Fig. 50), der Rauminhalt $\frac{1}{2} d \cdot h \cdot l$. Diese Form ist also günstiger als die parabolische; übrigens war ja von vornherein zu erwarten, dass es vortheilhafter ist, die Höhe überall möglichst gross zu halten. Auch hier darf in Wirklichkeit die Breite am freien Ende nicht ganz bis auf Null abnehmen.

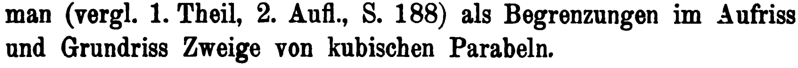
Fig. 51.



γ) Sollen die Rechteck-Querschnitte einander durchweg ähnlich bleiben, d. h. $u : v = d : h$, so wird aus Gl. 3:

6) $$\begin{cases} v^3 : h^3 = x : l \quad \text{und} \\ u^3 : d^3 = x : l. \end{cases}$$

Trägt man hiernach die Höhen und Breiten auf (Fig. 51), so erhält



man (vergl. 1. Theil, 2. Aufl., S. 188) als Begrenzungen im Aufriss und Grundriss Zweige von kubischen Parabeln.

Für den Aufriss gilt

$$3 v^2 dv = \frac{h^3 dx}{l}, \quad \text{mithin}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} \frac{dv}{dx} = \frac{h^3}{6 v^2 l}$$

und die Neigung der Tangente im Punkt C (Fig. 51) $(x = l;\ v = h)$

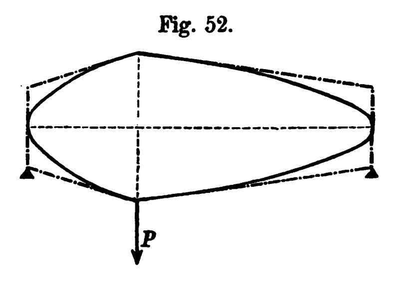
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{6 l}.$$

Legt man um die kubischen Parabeln geradlinige Umschliessungsformen, so wird die Höhe und Breite am freien Ende $^2/_3 h$ bezw. $^2/_3 d$.

II. Kreisförmiger Querschnitt.

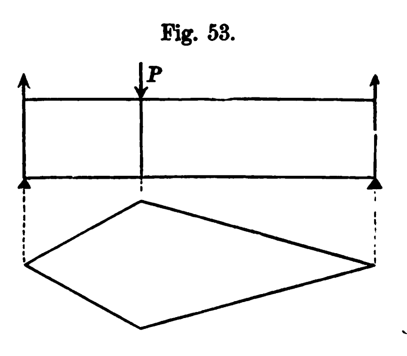
Der Halbmesser an beliebiger Stelle sei v, an der Einspannungsstelle r, so wird nach Gl. 2: $^1/_4 v^3 \pi : {}^1/_4 r^3 \pi = x : l$, oder $v^3 : r^3 = x : l$. Diese Gleichung entspricht der Gl. 6. Die Form des Stabes oder Balkens wird also ein Umdrehungskörper, dessen Meridianlinie ein Zweig einer kubischen Parabel ist.

Fig. 52.



Diese Formen von Balken überall gleicher Sicherheit gelten in allen Fällen, in denen das Biegungsmoment sich nach geradlinigem Gesetz ändert, also auch, wenn ein Balken auf zwei Stützen eine Einzellast trägt. Genügt dann an der Laststelle ein rechteckiger Querschnitt $d \cdot h$, und soll die Breite überall gleich sein, so erhält man (Fig. 52) leicht die Umschliessungsform, wenn man an beiden Auflagern die Höhe $= {}^1/_2 h$ macht. In diese lassen sich die Parabeln leicht einzeichnen. Die Unstetigkeit der Momentenfläche an der Belastungsstelle (s. Fig. 35, S. 29) hat zur Folge, dass auch die Begrenzung der Balkenform hier Knicke zeigt.

Fig. 53.



Bei gleich bleibender Höhe würde der Balken im Grundriss die Form der Fig. 53 (aus zwei Dreiecken bestehend) erhalten.

Bei kreisförmigem Querschnitte würde die Umschliessungsform an den Auflagern $^2/_3 r$ als Halbmesser zeigen. Dies findet Anwendung bei Achsen, die durch das Gewicht eines schweren Rades belastet sind.

Auch für gleichförmig belastete Balken auf zwei Stützen lassen sich leicht Formen gleicher Sicherheit entwickeln. Bei rechteckigem Querschnitte überall gleicher Breite wird der Aufriss eine Ellipse.

5. Biegungslinie.

Die Linie, nach der sich die ursprünglich gerade Achse des Stabes oder Balkens krümmt, heisst die Biegungslinie. In Fig. 19 (S. 19) ist O der Krümmungsmittelpunkt der Biegungslinie für die Stelle G derselben. Gemäss Gl. 2, S. 20 ist demnach

1) $$\varrho = \frac{E e'}{\sigma'}$$

der Krümmungshalbmesser an einer Stelle, auf welche sich e' und σ' beziehen. Da E (vgl. S. 9) meist bedeutend grösser als σ', so folgt aus dieser Gleichung, dass für die meisten Fälle der Anwendung der Krümmungshalbmesser verhältnismässig gross, die Krümmung $1:\varrho$ daher klein ausfällt, was für das Weitere von Wichtigkeit ist und durch folgende Beispiele erhärtet werden soll: Bei Stabeisen wird σ' höchstens 1000^{at}, mithin $E:\sigma' = 2000$ und $\varrho = 2000\,e'$ oder für $e' = {}^1/_2\,h$, $\varrho = 1000\,h$; an allen Stellen, an denen σ kleiner ist, wird ϱ noch grösser. Ein I-Träger von $0{,}2^{m}$ Höhe biegt sich also nach Krümmungshalbmessern von mindestens 200^{m}. Für Holz ist σ' höchstens 100^{at}, mithin $\varrho = 1200\,e'$ $= 600\,h$, d. h. ebenfalls recht gross. An den Stellen, wo die Biegungsspannung Null, ist $\varrho = \infty$ oder die Krümmung $= 0$.

Mit $\sigma' = \mathfrak{M} e' : J$ (Gl. 3, S. 22) geht Gl. 1 über in

2) $$\varrho = \frac{EJ}{\mathfrak{M}};\ \frac{1}{\varrho} = \frac{\mathfrak{M}}{EJ}.$$

Diese Gleichung rührt von Jakob Bernoulli (geb. 27. December 1654 zu Basel, gest. am 16. August 1705 daselbst) her; vgl. auch S. 19 Fussnote.

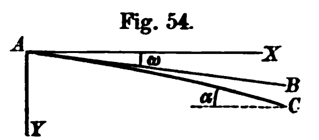
Nach den Lehren der Analytischen Geometrie ist aber

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\frac{d^2 y}{d x^2}}{\left[1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2\right]^{3/2}},$$

Setzt man nun diese zwei Ausdrücke für $\frac{1}{\varrho}$ einander gleich und beachtet, dass $\frac{\mathfrak{M}}{J}$ eine Funktion von x ist, so ergiebt sich eine Gleichung, in welcher die erste und die zweite Abgeleitete der Gleichung der Biegungslinie vorkommen. Eine solche Gleichung

heisst Differentialgleichung: sie ist in dem vorliegenden Falle meist nicht in geschlossener Form lösbar. Für die gewöhnlichen Fälle der Anwendung ist aber daraus eine Annäherungsgleichung von genügender Genauigkeit abzuleiten. Lässt sich die x-Achse so legen, dass sie mit der Mittellinie AB des ungebogenen Stabes entweder parallel ist, oder nur einen sehr kleinen Winkel ω bildet (Fig. 54), so wird auch die Neigung der meist nur schwach gekrümmten Biegungslinie AC gegen die x-Achse, d. h. $dy:dx$, durchweg nur klein sein. Daher kann man in solchen Fällen $1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ mit der Einheit vertauschen. Würde z. B. der grösste Werth von $dy:dx$ $=0{,}1$ (entsprechend einem Winkel $\alpha=6^0$) so würde doch $1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ höchstens $1+0{,}01$, worin man $0{,}01$ gegen 1 vernachlässigen kann. Gl. 2 (S. 43) liefert nämlich nicht sehr genaue Werthe für die Biegungslinie, weil darin z. B. der Einfluss der Schubspannungen nicht berücksichtigt ist; auch kennt man die Zahl E für einen vorliegenden Balken meist nicht auf 1 % genau. Die sehr runden Zahlen der Tabelle (S. 9) lassen schon darauf schliessen, dass sie nur Mittelwerthe sein können, von denen die wahren Zahlen zuweilen nicht unbeträchtlich abweichen. Solch grosse Werthe von $dy:dx$, wie vorstehend angenommen, nämlich 0,1, kommen aber bei guten Bauträgern selten vor; man kann also unbedenklich $\frac{1}{\varrho}=\frac{d^2y}{dx^2}$ setzen; dann wird

Fig. 54.



3) $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\mathfrak{M}}{EJ}.$$

Diese im Jahre 1826 von Navier, dem Begründer der wissenschaftlichen Elasticitätslehre (geb. 1785 zu Dijon, gest. 1836 zu Paris), angegebene Gleichung führt in den einfacheren Fällen nach einmaliger Integration zu $dy:dx$ und nach nochmaliger Integration zu $y=f(x)$, der Gleichung der Biegungslinie.

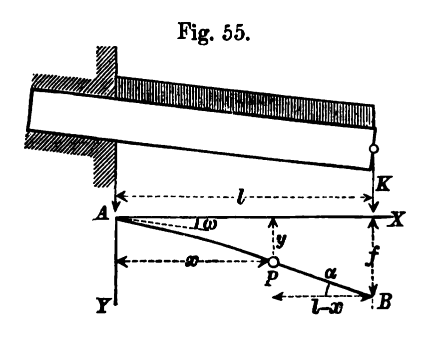
An solchen Stellen, wo das Moment $\mathfrak{M}=0$, ist auch $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ (wenn $J>0$), d. h. die Biegungslinie hat dort einen Wendepunkt, ihre Krümmung ist Null.

Die Spannung σ' ist stets endlich; solange nun die Trägerhöhe und damit auch $e' > 0$, bleibt nach Gl. 1 auch $\frac{\sigma'}{E e'} = \frac{1}{\varrho}$ endlich; demnach kann auch $\frac{d^2 y}{d x^2}$ nicht unendlich gross werden. Die Neigung $\frac{d y}{d x}$ der Biegungslinie ändert sich daher immer stetig, nicht plötzlich, es sind in keiner Stelle der Linie zwei Tangenten möglich, die Biegungslinie kann nirgends einen Knick haben.

a) Einseitig eingespannter prismatischer Stab oder Balken.

Ein prismatischer Stab oder Balken sei an der linken Seite unwandelbar eingespannt, u. zw., der Allgemeinheit wegen, nicht völlig wagerecht, sondern mit einer kleinen Neigung ω abwärts (Fig. 55); der Balken sei gleichmässig mit p für die Längeneinheit der Horizontalprojektion und am Ende durch eine Kraft K lothrecht belastet. In dem unteren Theile der Fig. 54 ist die Kurve AB die Biegungslinie, AX wagrecht, AY lothrecht nach unten. Die Biegung sei so gering angenommen, dass die wagerechte Länge des Stabes auch im gebogenen Zustande noch $= l$ gesetzt werden kann.

Fig. 55.



Für einen Punkt P (x, y) der Biegungslinie ist das Biegungsmoment, wenn man das Stück rechts von P betrachtet,

$$\mathfrak{M} = K(l - x) + \frac{p(l - x)^2}{2}.$$

Dann wird, wenn man in Gl. 3 alle Glieder mit $E \cdot J \cdot dx$ multiplicirt,

$$EJ \frac{d^2 y}{dx} = K(l - x)\, dx + \frac{p}{2}(l^2 - 2lx + x^2)\, dx.$$

Integrirt man beide Seiten der Gleichung, so entsteht

$$4) \qquad EJ \frac{dy}{dx} = K\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{p}{2}\left(l^2 x - l x^2 + \frac{x^3}{3}\right) + C.$$

Die Integrations-Konstante C muss so bestimmt werden, dass für $x = 0$ auch $dy:dx = \omega$ wird (entsprechend der Einspannung und indem man $\operatorname{tg}\omega$ mit ω vertauscht). Daraus folgt $EJ\omega = C$. Für das Neigungsverhältnis $\operatorname{tg}\alpha = \alpha$ am freien Ende, also für $x = l$, ergiebt sich $EJ\alpha = {}^1\!/_2 Kl^2 + {}^1\!/_6 p l^3 + EJ\omega$, somit

5) $$\alpha = \frac{Kl^2}{2EJ} + \frac{pl^3}{6EJ} + \omega.$$

Multiplicirt man aber Gl. 4 mit dx und integrirt wiederum, so ergiebt sich als Gleichung der Biegungslinie

$$EJy = K({}^1\!/_2 l x^2 - {}^1\!/_6 x^3) + {}^1\!/_2 p ({}^1\!/_2 l^2 x^2 - {}^1\!/_3 l x^3 + {}^1\!/_{12} x^4) + EJ\omega x + C_1.$$

Da für $x = 0$ auch $y = 0$ sein muss, weil der Anfangspunkt der Koordinaten in der Biegungslinie liegt, so wird $C_1 = 0$. Bezeichnet man die Ordinate des Endpunktes B der Biegungslinie (für $x = l$) mit f, so wird

$$EJf = {}^1\!/_3 K l^3 + {}^1\!/_8 p l^4 + EJ\omega l, \quad \text{mithin}$$

6) $$f = \frac{Kl^3}{3EJ} + \frac{pl^4}{8EJ} + \omega l.$$

Aus den Gl. 5 und 6 erkennen wir, dass auch bezüglich der Neigungen und der Ordinaten der Biegungslinie die Wirkungen der einzelnen Ursachen (K, p und ω) sich unabhängig von einander summiren, wie S. 33 für die Biegungsmomente gezeigt wurde. (Es gilt dies aber nur, solange man bei der Aufstellung des Biegungsmomentes die Durchbiegung vernachlässigen darf.) Ist der Stab wagerecht eingespannt und nur durch K belastet (sind also $\omega = 0$ und $p = 0$), so wird

7) $$\alpha = \frac{Kl^2}{2EJ}, \quad f = \frac{Kl^3}{3EJ};$$

ist er nur gleichmässig belastet ($\omega = 0$ und $K = 0$), so wird

8) $$\alpha = \frac{pl^3}{6EJ}, \quad f = \frac{pl^4}{8EJ}.$$

Ist der Stab gar nicht belastet, aber schräg eingespannt, so ist (selbstverständlich) $\mathfrak{M} = 0$; $1:\varrho = 0$ und

$$\alpha = \omega; \quad f = \omega l.$$

Vor weiterer Anwendung der Ergebnisse möge noch die **biegende Wirkung eines Kräftepaares** $\mathfrak{M}$ untersucht werden, das am freien Ende des wagerecht eingespannten Stabes wirkt (Fig. 56).

Fig. 56.

Es ist $$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=\mathfrak{M};$$

$$EJ\frac{dy}{dx}=\mathfrak{M}x+C \text{ mit } C=0;$$

9) $$\alpha=\frac{\mathfrak{M}l}{EJ}.$$

10) $$EJy=\tfrac{1}{2}\mathfrak{M}x^2+C_1 \text{ (mit } C_1=0);$$

11) $$f=\frac{\mathfrak{M}l^2}{2EJ}.$$

Um diese Werthe für α und f würden sich die in Gl. 5 und 6 gegebenen vergrössern, wenn in Fig. 55 noch das Kräftepaar $\mathfrak{M}$ am freien Ende hinzugefügt würde. Gl. 10 bedeutet eine Parabel vom Parameter $\frac{EJ}{\mathfrak{M}}$ als Biegungslinie für das Kräftepaar Fig. 56. Die etwas genauere Gleichung $\varrho=\frac{EJ}{\mathfrak{M}}$ (S. 43) würde für unveränderliches $\mathfrak{M}$ ein unveränderliches ϱ, d. h. eine **kreisförmige** Biegungslinie ergeben. Die Vertauschung von $\frac{1}{\varrho}$ mit $\frac{d^2y}{dx^2}$ hat also denselben Erfolg wie die Vertauschung eines Kreises von grossem Halbmesser ϱ mit einer Parabel vom Parameter ϱ.

Die einzelnen Einflüsse von K, p, $\mathfrak{M}$ und ω auf α und f stellen wir (nach A. **Ritter**, Technische Mechanik) wegen der häufigen Anwendbarkeit zusammen wie folgt:

Einfluss von	auf α	auf f
K	$\frac{Kl^2}{2EJ}$	$\frac{Kl^3}{3EJ}$
p	$\frac{pl^3}{6EJ}$	$\frac{pl^4}{8EJ}$
$\mathfrak{M}$	$\frac{\mathfrak{M}l}{EJ}$	$\frac{\mathfrak{M}l^2}{2EJ}$
ω	ω	$l\omega$

In den auf p bezüglichen Gliedern erscheint l mit einem um 1 höheren Exponenten als in den mit K behafteten, weil p noch keine Kraft ist, sondern erst durch Multiplikation mit einer Länge zu einer Kraft wird. In dem Biegungsmomente war K mit einer linearen Grösse multiplicirt; durch die beiden Integrationen verwandelte sich diese lineare Grösse in eine Grösse zweiten und dritten Grades. Daraus erklären sich die Exponenten von l in den Formeln. Diese Bemerkungen erleichtern das sichere Einprägen der Tabellenwerthe S. 47.

Beispiel: Ein Balkonträger rage aus einer Hauswand auf $l = 2^{m} = 200^{cm}$ wagerecht hervor (Fig. 57). Am freien Ende befinde sich eine Einzellast $K = 200^{kg}$, und ausserdem seien $pl = 200^{kg}$ gleichmässig über die Balkenlänge l vertheilt. Wie gross sind die stärkste Spannung σ und die Durchbiegung f des hölzernen Balkens vom Querschnitte $d = 12^{cm}$, $h = 20^{cm}$ für $E = 120\,000^{at}$?

Fig. 57.

Das grösste Moment tritt an der Wand auf und beträgt

$\mathfrak{M} = 200 \cdot 200 + 200 \cdot 100$
$= 60\,000^{cmkg}$;

das Widerstandsmoment ist

$\mathfrak{W} = {}^1/_6 \cdot 12 \cdot 20^2 = 800^{cm^3}$, daher

$\sigma = 60\,000 : 800 = 75^{at}$.

Das Trägheitsmoment ist $J = \mathfrak{W} \cdot 10 = 8000^{cm^4}$, daher

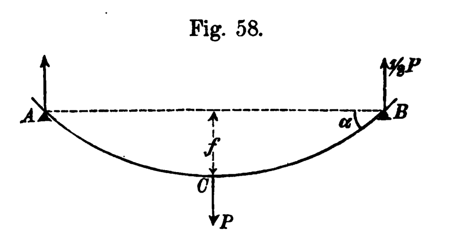
$$f = \frac{Kl^3}{3EJ} + \frac{pl^4}{8EJ} = \frac{200 \cdot 200^3}{3 \cdot 120\,000 \cdot 8000} + \frac{200 \cdot 200^3}{8 \cdot 120\,000 \cdot 8000}$$
$$= 0{,}76^{cm} = {}^1/_{263} \text{ der Länge.}$$

In vielen Fällen der Anwendung wirken die einzelnen Ursachen einander entgegen (indem vielleicht K aufwärts, p abwärts gerichtet ist), dann hat man die einzelnen Einflüsse mit theilweise entgegengesetzten Vorzeichen sinngemäss zu verbinden.

b) Prismatischer Balken auf zwei Stützen.

Trägt ein prismatischer Balken auf zwei Stützen in der Mitte eine Einzellast (Fig. 58), so muss die Biegungslinie zu einer Lothrechten durch die Mitte symmetrisch, d. h. in der Mitte bei C wagerecht sein. Für die Spannungen und Formänderungen ist es nun gleichgültig, durch welche Mittel die wagerechte Richtung bei C erzwungen wird — ob durch den Zusammenhang mit einer anderen Hälfte, oder durch feste

Fig. 58.



Einspannung. Daher kann man die rechtsseitige Hälfte CB ansehen als bei C aus einer einspannenden Wand wagerecht um $1/2\, l$ hervorragend und am freien Ende durch eine Kraft $1/2\, P$ aufwärts gebogen, in Folge dessen der Punkt B um f höher liegt als der Punkt C. Man kann daher für f die Grundformel $\frac{Kl^3}{3EJ}$ (S. 47) anwenden, nur muss man K mit $1/2\, P$, l mit $1/2\, l$ vertauschen. Dann wird

12) $$f = \frac{1/2\, P \cdot 1/8\, l^3}{3\, EJ} = \frac{Pl^3}{48\, EJ}.$$

Ebenso gilt für die Neigung α (am Ende) die Formel $\frac{Kl^2}{2EJ}$, also

13) $$\alpha = \frac{1/2\, P \cdot 1/4\, l^2}{2\, EJ} = \frac{Pl^2}{16\, EJ}.$$

Für Zahlenrechnungen ist es in solchen Fällen meist bequemer, die stärkste Spannung σ einzuführen. Für diese gilt nach S. 23 und 30:

$$\sigma \frac{J}{e} = \frac{Pl}{4}, \text{ also } \frac{Pl}{4J} = \frac{\sigma}{e}.$$

Hiermit wird aus Gl. 12 und 13: $f = \frac{1}{12} \frac{\sigma}{E} \frac{l^2}{e}$, oder, um überall Verhältnisse gleichartiger Grössen zu haben:

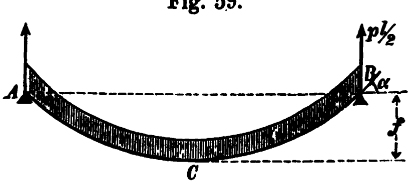
14) $$\frac{f}{l} = \frac{1}{12} \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e}$$

15) $$\alpha = \frac{1}{4} \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e}$$

für eine Einzellast P in der Trägermitte.

Einen gleichmässig über die ganze Länge belasteten Balken (Fig. 59) kann man ansehen als bei C wagerecht eingespannt, im Abstand $1/2\, l$ durch eine Einzelkraft $1/2\, pl$ aufwärts gebogen und durch eine gleichmässige Belastung p abwärts gebogen. Dann wird

Fig. 59.



mittels richtiger Anwendung der Tabelle auf S. 47:

16) $$f = \frac{1/2\, pl \cdot 1/8\, l^3}{3\, EJ} - \frac{p \cdot 1/16\, l^4}{8\, EJ} = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EJ}.$$

17) $$\alpha = \frac{{}^1\!/_2\, p\, l \cdot {}^1\!/_4\, l^2}{2EJ} - \frac{p \cdot {}^1\!/_8\, l^3}{6EJ} = \frac{p l^3}{24EJ}.$$

Für die stärkste Spannung gilt wieder nach S. 33: $\sigma \frac{J}{e} = \frac{p\,l^2}{8}$; setzt man also $\frac{p\,l^2}{8J} = \frac{\sigma}{e}$ in die Gl. 16 und 17 ein, so wird

18) $$\frac{f}{l} = \frac{5}{48} \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e}$$

19) $$\alpha = \frac{1}{3} \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e}$$

für gleichförmig vertheilte Last p.

Beispiel: Sind die Verhältnisse so gewählt, dass $\sigma = 700^{at}$, $E = 2\,000\,000^{at}$; $l : e = 20$, so wird im Falle der Einzellast (Gl. 14 und 15):

$$\alpha = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0{,}00175 = 0^\circ\, 6'.$$

$$\frac{f}{l} = \frac{1}{12} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0{,}00058.$$

Im Falle der gleichmässigen Belastung ergeben die Gl. 18 und 19:

$$\alpha = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0{,}00233 = 0^\circ\, 8'.$$

$$\frac{f}{l} = \frac{5}{48} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0{,}00073.$$

Bei gleichen stärksten Spannungen und gleicher Spannweite verhalten sich hiernach die Durchbiegungen in Folge gleichförmiger Belastung bezw. einer Einzellast zu einander wie $5 : 4 = 1{,}25 : 1$. Die Ursache hiervon liegt darin, dass die Momentenflächen in beiden Fällen gleiche Pfeilhöhe haben, die eine aber parabolisch, die andere dreieckig gestaltet ist. Die aus dem Inhalte der Momentenflächen abgeleiteten Mittelwerthe der Momente sind also ${}^2\!/_3$ bezw. ${}^1\!/_2\, \mathfrak{M}_{max}$, verhalten sich demnach wie $4 : 3 = 1{,}33 : 1$. Last $p\,l$ ist $= 2P$.

Bei sehr dünnwandigen I-Trägern wird die Durchbiegung wegen des Auftretens der Gleitung durch die Schubspannungen etwas grösser.

c) Biegung von einseitig eingespannten Balken überall gleicher Sicherheit.

Die Krümmung der Biegungslinie ist allgemein $\frac{1}{\varrho} = \frac{\sigma}{Ee}$ (S. 43, Gl. 1). Setzt man nun die Querschnittshöhe an beliebiger Stelle $= v$, und $e = {}^1\!/_2\, v$, so wird, wenn jetzt die Randspannung σ in allen Querschnitten gleich gross sein soll,

20) $$\frac{E}{2\sigma} \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{v}.$$

α) Wird dem Balken überall gleicher Sicherheit auch überall gleiche Höhe $v = h$ gegeben, so wird nach Gl. 20 auch ϱ überall gleich, d. h. die Biegungslinie ein Kreisbogen vom Halbmesser $\frac{Eh}{2\sigma}$ (wie in dem besonderen Falle der Fig. 56, S. 47), wofür man auch eine Parabel setzen kann.

Die Durchbiegung findet man am einfachsten, indem man in Gl. 20 für $\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2y}{dx^2}$ setzt und 2 mal integrirt. Bei wagerechter Einspannung ergiebt sich dann auf ähnlichem Wege wie S. 45:

$$\frac{E}{2\sigma}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h}; \quad \frac{E}{2\sigma}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{h} + C \text{ mit } C = 0;$$

$$\frac{E}{2\sigma} y = \frac{x^2}{2h} + C_1 \text{ mit } C_1 = 0; \quad \frac{E}{\sigma} f = \frac{l^2}{h};$$

$$\frac{f}{l} = \frac{\sigma}{E}\frac{l}{h} \quad \text{oder, wegen } \sigma = \frac{\mathfrak{M}_1}{J_1}\frac{h}{2},$$

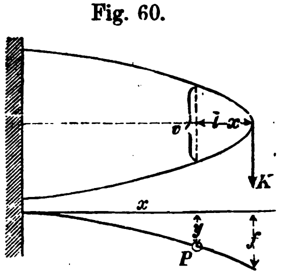
wenn $\mathfrak{M}_1$ und J_1 sich auf irgend einen, z. B. den Befestigungsquerschnitt, beziehen: $f = \frac{\mathfrak{M}_1 l^2}{2EJ_1}$.

Erfolgt z. B. die Biegung durch eine am äusseren Ende wirkende Kraft K, so ist $\mathfrak{M}_1 = Kl$ und

21) $$f = \frac{Kl^3}{2EJ_1}.$$

Die Durchbiegung ist also wegen der dreieckigen Zuschärfung im Grundrisse (Fig. 50) $1\frac{1}{2}$ mal so gross wie bei prismatischen Balken (Gl. 7, S. 46).

Fig. 60.



β) Ist die Höhe v nach parabolischem Gesetze veränderlich (Fig. 49), so tritt an Stelle der Gl. 4 S. 40 mit den Bezeichnungen der Fig. 60 die folgende: $v^2 : h^2 = (l - x) : l$ und Gl. 20 geht über in

$$\frac{E}{2\sigma}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sqrt{l}}{h}(l - x)^{-1/2}.$$

Multiplicirt man mit $dx = -d(l - x)$, so wird nach der ersten Integration

$$\frac{E}{2\sigma}\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{l}}{h} 2\sqrt{l-x} + C$$

bei wagerechter Einspannung ist für $x = 0$ auch $\frac{dy}{dx} = 0$, daher

$$C = \frac{2l}{h};\ \text{das giebt}$$

$$\frac{h}{4}\frac{E}{\sigma}\frac{dy}{dx} = l - \sqrt{l}\sqrt{l-x}.$$

Nochmalige Integration liefert

$$\frac{h}{4}\frac{E}{\sigma} y = l\cdot x + \frac{2}{3}\sqrt{l}\,(l-x)^{3/2} + C_1$$

wobei $C_1 = -\frac{2}{3} l^2$, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ ist.

$y = f$ für $x = l$ giebt sodann

$$\frac{f}{l} = \frac{4}{3}\frac{\sigma}{E}\frac{l}{h},\ \text{oder wegen}\quad \sigma = \frac{Kl}{J_1}\frac{h}{2}:$$

22) $$f = \frac{2}{3}\frac{Kl^3}{EJ_1}.$$

In diesem Falle wird also (wegen der nach dem Ende abnehmenden Höhe) die Durchbiegung doppelt so gross wie bei prismatischen Balken (vgl. S. 46).

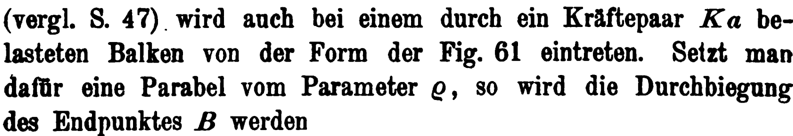


Fig. 61.

γ) Eine kreisförmige Biegung nach einem Halbmesser

$$\varrho = \frac{Eh}{2\sigma} = \frac{EJ_1}{\mathfrak{M}_1} = \frac{EJ_1}{K\cdot a}$$

(vergl. S. 47) wird auch bei einem durch ein Kräftepaar Ka belasteten Balken von der Form der Fig. 61 eintreten. Setzt man dafür eine Parabel vom Parameter ϱ, so wird die Durchbiegung des Endpunktes B werden

$$f = \frac{l^2}{2\varrho} = \frac{K\cdot a\cdot l^2}{2EJ_1},$$

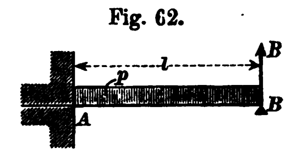
wenn J_1 das Trägheitsmoment des Einspannungs-Querschnittes.

Ist $h = 2$ cm, $\sigma = 700$ at, $E = 2\,000\,000$ at, so wird der Krümmungshalbmesser $\rho = \frac{2\,000\,000\cdot 2}{2\cdot 700} = 2857$ cm $= 28{,}57$ m.

d) Prismatischer, an dem einen Ende wagerecht eingespannter, am anderen Ende unterstützter, gleichmässig belasteter Balken.

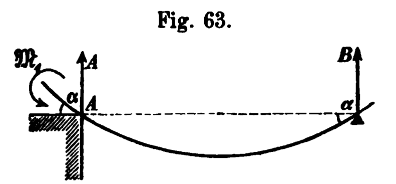
Der Balken rage bei A (Fig. 62) aus der einspannenden Wand hervor; der Endpunkt B liege genau in der Richtungslinie der Verlängerung des eingespannten Theiles. Dann ist, wie wir sehen werden, der Auflagerdruck B mit alleiniger Hülfe der Gleichgewichtsbedingungen nicht zu bestimmen, somit sind denn auch Biegungsmomente und Spannungen unbestimmt. Es liegt eine sog. statisch unbestimmte Aufgabe vor. In solchen Fällen führen nun die Ergebnisse der Biegungslehre zur Lösung.

Fig. 62.



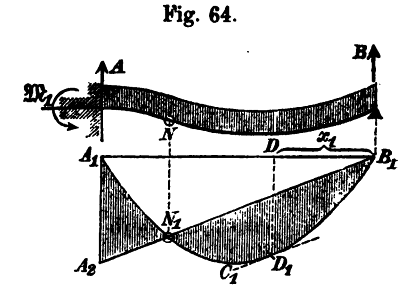
Um uns von der Unbestimmtheit der Aufgabe zu überzeugen, müssen wir uns zuerst die Wirkung der Einspannung klar machen, indem wir uns zunächst bei A den oberen Theil der einspannenden Wand fortdenken. Dann findet sich (Fig. 63) bei A nur eine unterstützende Kante; der Balken ist ein einfacher Träger auf zwei Stützen, biegt sich in der Mitte um die Grösse f nach Gl 16 (S. 49) durch und hat an beiden Enden eine Neigung α nach Gl 17 (S. 50) gegen die Wagerechte. Lässt man nun aber an dem links von A befindlichen Balkenstück ein links herum drehendes Kräftepaar $\mathfrak{M}_1$ wirken, welches sich, von Null beginnend, allmählich vergrössert, so wird dieses Balkenstück mehr und mehr niedergedrückt, und bei einer bestimmten Grösse von $\mathfrak{M}_1$ wird die Biegungslinie bei A genau wagerecht sein. Man kann daraus schliessen, dass die wagerecht einspannende Wand ausser dem Auflagerdruck A auch noch ein Einspannungsmoment $\mathfrak{M}_1$ auf den Balken ausübt. Für das Gleichgewicht eines Balkens, an dem neben Kräftepaaren nur lothrechte, nicht schräge Kräfte wirken, lassen sich nicht mehr als zwei von einander unabhängige Gleichgewichts-Gleichungen aufstellen, da zu der Gleichung der wagerechten Kräfte sich keine Glieder ergeben. Zur Bestimmung der drei Unbekannten, nämlich der Auflagerkräfte A und B sowie des Momentes $\mathfrak{M}_1$ (Fig. 64), hat man

Fig. 63.



also nur zwei Gleichgewichts-Bedingungen zur Verfügung; die fehlende dritte Gleichung muss aus der Biegungslehre entnommen werden. Man nennt daher Aufgaben der hier vorliegenden Art, bei welchen nur eine (statische) Gleichgewichts-Bedingung fehlt: einfach statisch unbestimmt. Die dritte Gleichung ergiebt sich in unserm Falle sehr einfach. Die Kraft B würde den Endpunkt des bei A wagerecht eingespannten, unbelasteten Stabes nach S. 47 in die Höhe biegen um $\frac{B l^3}{3 E J}$. Wäre die Stütze B nicht vorhanden, so würde die Belastung den Endpunkt um $\frac{p l^4}{8 E J}$ nach abwärts biegen. Da in Wirklichkeit der Endpunkt B in gleicher Höhe mit A liegt, so heben sich beide Durchbiegungen gegenseitig auf; es wird

Fig. 64.



$$\frac{B l^3}{3 E J} = \frac{p l^4}{8 E J} \text{ oder}$$

1) $$B = \frac{3}{8} p l = 0{,}375\, p l; \quad \text{somit}$$

2) $$A = {}^5/_8\, p l \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_1 = p \cdot l \cdot {}^1/_2\, l - {}^3/_8\, p l \cdot l = {}^1/_8\, p l^2$$

und zwar ist $\mathfrak{M}_1$ nach links drehend.

Diese Werthe gelten aber nur, wenn die an die Biegungslinie bei A gelegte Tangente genau durch den Punkt B geht, man hat dann vollkommene Einspannung, die freilich in Wirklichkeit nie genau vorkommt; geringe Abweichungen von dieser Bedingung haben grossen Einfluss auf die Auflagerkräfte. Weiteres siehe in der Elasticitätslehre.

In einem Abstande x von B ist das Biegungsmoment

3) $$\mathfrak{M} = B x - {}^1/_2\, p x^2 = {}^3/_8\, p l x - {}^1/_2\, p x^2.$$

Fügt man ${}^1/_8\, p l x$ mit + und — hinzu, so kann man auch schreiben:

$$\mathfrak{M} = {}^1/_2\, p l x - {}^1/_2\, p x^2 - {}^1/_8\, p l x$$

4) $$= {}^1/_2\, p x (l - x) - {}^1/_8\, p l x.$$

Das erste Glied der rechten Seite entspricht (nach Gl. 1 S. 35) einem auf beiden Seiten gestützten (nicht eingespannten) Balken; die entsprechende Momentenfläche ist eine Parabel $A_1 C_1 B_1$ (Fig. 64) von der Pfeilhöhe $\frac{1}{8} p l^2$. Das zweite Glied wird durch die Gerade $A_2 B_1$ dargestellt, wenn $A_1 A_2 = \frac{1}{8} p l^2$. Von den Ordinaten der Parabel muss man diejenigen der Geraden abziehen, um $\mathfrak{M}$ zu erhalten. Die lothrechte Schraffirung stellt die Momentenfläche dar und zeigt die Veränderlichkeit des Momentes.

Von B_1 (wo $\mathfrak{M} = 0$) beginnend, nimmt das Moment zunächst zu, erreicht an der Stelle D_1, wo die Parabel ∥ der Geraden $A_2 B_1$ ist, ein analytisches Maximum $\mathfrak{M}_{max}$, nimmt dann wieder ab, wird bei N_1, wo Parabel und Gerade sich schneiden, zu Null, geht dann ins Negative über und erreicht den grössten negativen Werth $\mathfrak{M}_1 = -\frac{1}{8} p l^2$ an der Einspannungsstelle.

B und N sind Momentennullpunkte. Im Folgenden sollen bei Balken mit wechselnder Biegung die nach unten biegenden Momente, wie beim Balken auf zwei Stützen (S. 35), als positive, die nach oben biegenden Momente als negative bezeichnet werden.

Die Funktion von der Form $\mathfrak{M} = Bx - \frac{1}{2} p x^2$ erreicht, wie schon S. 38 gefunden (dort war A statt B gesetzt), das Maximum

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{B^2}{2p} \quad \text{für} \quad x_1 = \frac{B}{p};$$

das giebt für $B = \frac{3}{8} p l$

$$5) \qquad \mathfrak{M}_{max} = \frac{9}{128} p l^2 \quad \text{und} \quad x_1 = \frac{3}{8} l \quad (\text{Punkt } D_1 \text{ Fig. 64}).$$

Setzt man $Bx - \frac{1}{2} p x^2 = 0$, so erhält man die Momentennullpunkte und zwar für $x = 0$ (Punkt B_1) und für $x = \frac{2B}{p} = \frac{3}{4} l$ (Punkt N_1).

Es findet sich also $\mathfrak{M}_{max}$ mitten zwischen den beiden Momenten-Nullpunkten. Einem Momente $= 0$ entspricht bei einem Balken, dessen Querschnitt ein Trägheitsmoment $J > 0$ hat, die Krümmung $= 0$, und der Krümmungshalbmesser $\varrho = \infty$ der Biegungslinie. N_1 entspricht daher einem Wendepunkte N der Biegungslinie. Rechts von N kehrt die Biegungslinie ihre konvexe Seite nach unten ‿, wie bei einem Balken auf zwei Stützen; links

von N ist die Krümmung ⌒ und damit auch das Moment entgegengesetzt, also negativ; vgl. S. 55.

Solche Querschnitte, an denen der Absolutwerth des Biegungsmoments grösser ist als zu beiden Seiten daneben, heissen gefährliche Querschnitte. Hier giebt es deren zwei, nämlich D und A. Beide sind aber nicht in gleichem Maſse gefährlich; denn die Absolut-Werthe ihrer Momente $\frac{9}{128} p l^2$ und $\frac{1}{8} p l^2 (= \frac{16}{128} p l^2)$ verhalten sich wie 9:16. Das absolut grösste Moment herrscht also an der Einspannungsstelle und ist dort negativ, sein Zahlenwerth aber ebenso gross, als wenn der Balken an beiden Enden einfach gestützt wäre; das grösste Moment hat sich daher in Folge der Einspannung nicht vermindert, sondern nur von der Mitte nach dem Ende A verschoben und den Drehsinn verändert.

Eine Verminderung des grössten Momentes (und damit auch des erforderlichen Balkenquerschnitts, oder aber eine Vermehrung der Tragfähigkeit des vorhandenen Querschnitts) lässt sich daher erreichen, wenn man die Stütze B um ein gewisses Maſs nach oben schiebt. Durch dieses Aufwärtsbiegen vergrössert man den Stützendruck B; in Folge dessen wird in $\mathfrak{M}$ (Gl. 3, S. 54) das positive Glied vergrössert, hierdurch das bisher kleinere Moment $\mathfrak{M}_{max}$ vergrössert und der absolute Werth des negativen Momentes $\mathfrak{M}_1$ vermindert. Man erkennt dies deutlicher, wenn man zu dem allgemeinen Ausdrucke für $\mathfrak{M}$ (Gl 3), der von der Höhenlage des Punktes B noch unabhängig ist, $\mathfrak{M} = Bx - \frac{1}{2} p x^2$, die Grösse $\frac{1}{2} p l x$ mit + und — hinzufügt, dann hat man: $\mathfrak{M} = Bx - \frac{1}{2} p l x + \frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2$ oder

6) $$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} p x (l - x) - (\tfrac{1}{2} p l - B) x.$$

Darin bezeichnet wieder das erste Glied der rechten Seite die unveränderte Parabel $A_1 C_1 B_1$ (Fig. 64), während das letzte Glied wiederum durch eine Gerade dargestellt wird, deren Endordinate $A_1 A_2$ nun aber $= (\frac{1}{2} p l - B) l$, d. h. von B abhängig ist, und zwar bedeutet $A_1 A_2$ wiederum den absoluten Werth $\mathfrak{M}_1$ des Einspannungsmomentes. Man hat also

7) $$\mathfrak{M}_1 = -(\tfrac{1}{2} p l - B) l.$$

Die günstigste Momentenfläche, d. h. diejenige, in welcher das absolut grösste Moment so klein wie möglich ist, kann man zunächst zeichnerisch durch Probiren finden, indem man die Ge-

rade $B_1 A_2$ solange um B_1 dreht, bis die beiden lothrecht gemessenen Abstände zwischen der Geraden und der Parabel, welche die Werthe $\mathfrak{M}_{max}$ und $\mathfrak{M}_1$ darstellen, gleich geworden sind. Eine günstigere Momentenfläche ist nicht mehr denkbar, denn jede Änderung der Richtung von $B_1 A_2$ würde wohl das eine der beiden Momente verkleinern, das andere aber vergrössern. Hier, wie in den meisten derartigen Fällen, wo mehrere gefährliche Querschnitte vorhanden sind, kommt es also darauf an, die Momente dieser Querschnitte auszugleichen, wenn man den günstigsten Zustand herbeiführen will. Hat man die Ausgleichung zeichnerisch gefunden, so braucht man nur $A_1 A_2 = (\frac{1}{2} p l - B) l$ zu setzen und hat damit B bestimmt. — Der Weg der Rechnung bedingt, dass man das analytische Maximum von $\mathfrak{M}$, (nach S. 55) $\frac{B^2}{2p}$ dem Absolutwerth von $\mathfrak{M}_1$, d. h. $\frac{p l^2}{2} - B l$, gleichsetzt. Diese quadratische Gleichung liefert die beiden Lösungen $B = p l(-1 \pm \sqrt{2})$, von denen hier nur der positive Werth, nämlich

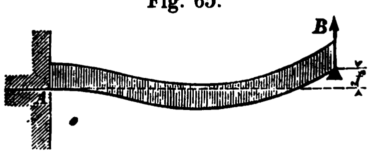
8) $$B = p l(-1 + 1{,}414) = 0{,}414 p l$$

in Betracht kommen kann; der negative Werth würde ja $\frac{B^2}{2p}$ sehr gross machen. Man erhält also jetzt einen um $= 0{,}039\, p l$ grösseren Auflagerdruck, als nach Gl. 1. Da nun für diesen Auflagerdruck $B = 0{,}414\, p l$ die Momente $\mathfrak{M}_{max}$ und $\mathfrak{M}_1$ gleich werden, so berechnet man den Wert beider am einfachsten aus dem Absolutwerth von $\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{2} p l^2 - B l = p l^2 (0{,}5 - 0{,}414) = 0{,}086\, p l^2$. Dem Auflagerdrucke $B = 0{,}414 p l$ entspricht daher ein überhaupt grösstes Moment

9) $$\mathfrak{M}_{max} = -\mathfrak{M}_1 = 0{,}086\, p l^2,$$

während für $B = \frac{3}{8} p l$ sich $\mathfrak{M}_1 = -\frac{1}{8} p l^2 = -0{,}125 p l^2$ ergab. Der Absolutwerth des grössten Momentes ist also bei gegebener Balkenlänge und Last im Verhältnis von 125 auf 86 vermindert, somit die Tragfähigkeit auf das $125 : 86 = 1{,}45$ fache gestiegen.

Fig. 65.



Um nun diejenige Hebung f des Punktes B gegen die Einspannungsstelle A zu finden, welche dieser Verbesserung entspricht, bringt

man an die Biegungslinie die Kraft $B = 0{,}414\, p\, l$ (Fig. 65) und bekommt durch denselben Gedankengang, der auf S. 54 zur Bestimmung von B für $f = 0$ führte, jetzt

$$f = \frac{B l^3}{3 EJ} - \frac{p l^4}{8 EJ} = \frac{p l^4}{EJ}\left(\frac{0{,}414}{3} - \frac{1}{8}\right).$$

10) $$f = 0{,}013 \frac{p l^4}{EJ}.$$

Um die verhältnismässige Grösse dieser Hebung einigermaſsen übersehen zu können, führen wir wieder die stärkste Spannung σ ein, indem wir bedenken, dass das grösste Moment jetzt $0{,}086\, p l^2$ beträgt und dieses $= \sigma \frac{J}{e}$ sein muss, so dass $\frac{p l^2}{J} = \frac{\sigma}{0{,}086\, e}$. Führt man dies in Gl. 10 ein, so wird

11) $$\frac{f}{l} = 0{,}151 \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e}.$$

Setzt man wieder, wie in anderen Beispielen (S. 50)

$$\sigma = 700; \quad E = 2\,000\,000; \quad {}^{l}/_{e} = 20,$$

so wird $\frac{f}{l} = 0{,}001\,057$, d. h. rund $^1/_{1000}$. Eine Hebung der Stütze B um $^1/_{1000}$ der Spannweite l genügt also schon, um die Tragfähigkeit des Balkens auf das 1,45fache zu erhöhen. Von diesem günstigen Ergebnisse würde man gewiss mit Vortheil Gebrauch machen, wenn man sicher wäre, den erstrebten Zustand des Balkens genau erreichen und auf die Dauer erhalten zu können. Wenn man aber die Mittel erwägt, die man zu einer derartig genauen Auflagerung eines Balkens anwenden müsste, so überzeugt man sich leicht, dass eine Balken-Anordnung, deren Spannungszustand von solchen Feinheiten abhängt, trotz der Möglichkeit, rechnungsmässig sehr günstige Verhältnisse zu liefern, wenig Vertrauen verdient, da durch geringe Abweichungen von der gewünschten Stützenlage eine starke Vergrösserung der Momente eintreten kann, ohne dass man es wahrzunehmen vermag. Dies ist ein Übelstand, der den meisten statisch unbestimmten Anordnungen anhaftet.

e) Prismatischer, gleichförmig belasteter Balken auf drei Stützen.

Wir betrachten hier nur den Fall, dass die Zwischen-Stütze gleiche Entfernung l von den beiden Endstützen hat. Für einen

solchen Balken (Fig. 66) kann man nur die beiden Gleichgewichtsgleichungen aufstellen:

1) $A + C + B = 2pl$

und (in Bezug auf C): $Al - Bl = 0$ oder

2) $A = B$.

Fig. 66.

Die noch fehlende dritte Gleichung muss wieder aus der Biegungslinie geschöpft werden; die Anordnung ist einfach statisch unbestimmt. Bei dieser dritten Gleichung kommt es nun wieder wesentlich auf die gegenseitige Höhenlage der Stützen an. Deshalb machen wir gleich von Anfang an die Annahme, die Mittelstütze C liege um c unter der Verbindungsgraden der Endstützen, wobei dann c beliebig $\gtreqless 0$ gesetzt werden kann. Geht man mit der Mittelstütze weit genug herunter, so wird der Balken sich schliesslich nur auf die Enden stützen (Fig. 67), so dass $A = B = pl$ und $C = 0$ wird. Schiebt man dagegen den Punkt C weit genug in die Höhe (Fig. 68), so wird der Balken sich schliesslich von A und B ganz abheben und nur auf C schweben, es wird $C = 2pl$, und $A = B = 0$ sein. Die Biegungslinie muss in diesen drei Fällen zur lothrechten Mittellinie symmetrisch, d. h. in der Mitte wagerecht sein (Fig. 69), da bei gleichförmiger Belastung und gleicher Stützweite l kein Grund zur Unsymmetrie vorhanden ist. Wenn man sich nun, wie bei Fig. 58 (S. 48) die linke Hälfte wagerecht eingespannt denkt, so gleicht die rechtseitige Hälfte CB in Fig. 69 der Fig. 65 (S. 57).

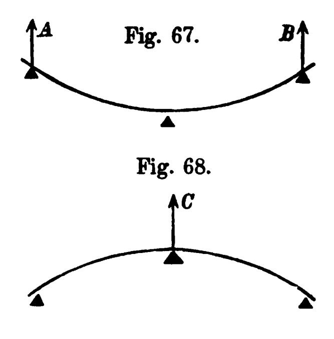
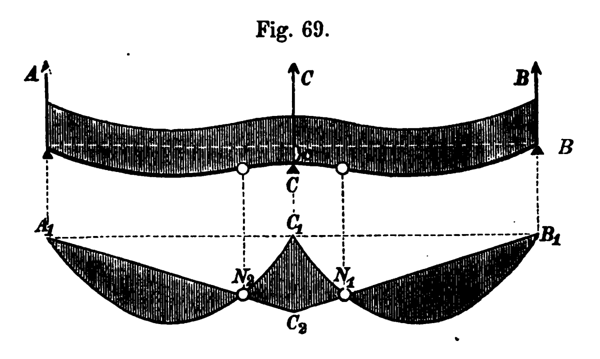


Fig. 67.

Fig. 68.

Fig. 69.





Die sämmtlichen Untersuchungen von S. 56—58 lassen sich daher hier verwerthen. Es wird mit c statt f

$$c = \frac{B l^3}{3 E J} - \frac{p l^4}{8 E J}, \quad \text{mithin}$$

3) $$B = \frac{3}{8} p l + \frac{3 E J c}{l^3} = A \quad \text{und nach Gl. 1.}$$

4) $$C = \frac{10}{8} p l - \frac{6 E J c}{l^3}.$$

Die Momentenfläche erhält für die rechtseitige Hälfte dieselbe Form, wie in Fig. 64 (S. 54); die linkseitige Hälfte ist dazu symmetrisch. $\mathfrak{M}_1$ wird hier das Moment über der Mittelstütze, also nach Gl. 7 S. 56.

5) $$\mathfrak{M}_1 = C_1 C_2 = -(^1/_2 p l - B) l.$$

Den Nullpunkten N_1 und N_2 entsprechen wieder Wendepunkte der Biegungslinie. Zwischen den Wendepunkten kehrt die Biegungslinie die konvexe Seite nach oben (die Zugspannungen liegen oben), ausserhalb derselben ist es umgekehrt. Mitten zwischen B_1 und N_1 liegt ein positives Maximalmoment, das nach S. 55 beträgt:

6) $$\mathfrak{M}_{max} = \frac{B^2}{2 p},$$

ebenso zwischen A_1 und N_2.

Für $c = 0$ sind alle Stützen in gleicher Höhenlage, daher $B = {}^3/_8\, p\, l$; $\mathfrak{M}_1 = -{}^1/_8\, p\, l^2$ und nach Gl. 5 S. 55: $\mathfrak{M}_{max} = {}^9/_{128}\, p\, l^2$. Eine Senkung der Mittelstütze um c vergrössert B, vergrössert $\mathfrak{M}_{max}$ und verkleinert gleichzeitig den Absolutwerth von $\mathfrak{M}_1$.

Die **günstigste Anordnung** für den Balken wird wieder durch Ausgleichung der Momente $\mathfrak{M}_{max}$ und $\mathfrak{M}_1$ erreicht. Dies verlangt nach Gl. 8 (S. 57)

7) $$B = 0{,}414\, p\, l,$$

was nach Gl. 10 und 11 (S. 58) durch

8) $$\frac{c}{l} = 0{,}013 \frac{p l^3}{E J} = 0{,}151 \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e}$$

erreicht wird. Die grössten Momente stellen sich dann auf

9) $$\mathfrak{M}_{max} = -\mathfrak{M}_1 = 0{,}086\, p\, l^2,$$

während bei Stützen in gleicher Flucht $\mathfrak{M}_1 = -0{,}125\, p\, l^2$ sein würde.

Sollen endlich die Stützendrücke gleich gross werden, also $A = B = C = {}^2/_3 pl$, so ergiebt Gl. 3 oder 4

$$10) \qquad \frac{c}{l} = 0{,}0972 \cdot \frac{pl^3}{EJ}.$$

Die Stützensenkung c ist also dann 7,48 mal so gross, wie für gleiche Biegungsmomente.

Beispiel: Ein Holzbalken von $2l = 10^{\text{m}} = 1000^{\text{cm}}$ Länge, im Querschnitte 15^{cm} breit und 16^{cm} hoch, werde von drei Arbeitern getragen, welche den Balken in den Punkten A, C und B stützen. Es soll die Gewichtsvertheilung berechnet werden für verschiedene Höhenlagen der tragenden Schultern. Der Balken hat $10 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}15 = 0{,}24^{\text{cbm}}$ Inhalt. Wiegt 1^{cbm} 600^{kg}, so wird das Gesammtgewicht $2pl = 144^{\text{kg}}$, also $p = 0{,}144^{\text{kg}/\text{cm}}$. Es ist $J = {}^1/_{12}\, 15 \cdot 16^3 = 5120^{\text{cm}^4}$; $\mathfrak{W} = 5120 : 8 = 640^{\text{cm}^3}$; $E = 120\,000^{\text{at}}$, $l = 500^{\text{cm}}$, $pl = 72^{\text{kg}}$,

somit wird $$A = B = \frac{3}{8} \cdot 72 + \frac{3EJc}{l^3} = 27 + 14{,}746\, c;$$

$$C = \frac{10}{8} \cdot 72 - \frac{6EJc}{l^3} = 90 - 29{,}492\, c.$$

Fehlt die Mittelstütze, so wird $A = B = 72^{\text{kg}}$; die Durchbiegung in der Mitte ergiebt sich dann für $C = 0$ zu

$$c = 90 : 29{,}492 = 3{,}05^{\text{cm}}.$$

Hält der mittlere Arbeiter also seine Schulter um dies Maſs niedriger als die beiden anderen, so bekommt er gar keine Last. In diesem Falle ist das grösste Moment in der Mitte

$${}^1/_8\, p\,(2\,l)^2 = {}^1/_2\, p\,l^2 = {}^1/_2 \cdot 72 \cdot 500 = 18\,000^{\text{cmkg}}$$

und die Spannung $\sigma = 18\,000 : 640 = 28{,}1^{\text{at}}$.

Sollen alle drei Schultern gleich stark tragen, soll $A = B = C = {}^1/_3 \cdot 144 = 48^{\text{kg}}$ sein, so muss die mittlere Schulter um $c = \dfrac{48 - 27}{14{,}746} = 1{,}42^{\text{cm}}$ tiefer liegen als die anderen. In diesem Falle wird nach Gl. 6, bezw. 5, $\mathfrak{M}_{max} = \dfrac{48^2}{2 \cdot 0{,}144} = 8000$, $\mathfrak{M}_1 = -({}^1/_2 \cdot 72 - 48)\, 500 = +\,6000$, d. h. $\mathfrak{M}_1$ wird jetzt ebenfalls positiv, so dass ein Wendepunkt nicht vorkommt. Die stärkste Spannung in diesem Zustande ist $8000 : 640 = 12{,}5^{\text{at}}$.

Die Spannung wird am kleinsten für $\mathfrak{M}_{max} = -\mathfrak{M}_1$, d. h. nach Gl. 8 für

$$c = 0{,}013\, \frac{p\,l^4}{EJ}, \quad \text{oder kürzer } c = \frac{1{,}42}{7{,}48} = 0{,}19^{\text{cm}}.$$

Dabei ist $A = B = 0{,}414\, p\,l = 29{,}8^{\text{kg}}$; $C = 144 - 2 \cdot 29{,}8 = 84{,}4^{\text{kg}}$, so dass die mittlere Schulter jetzt erheblich mehr belastet ist. Das grösste Moment wird $0{,}086\, p\,l^2 = 3096$, die Spannung $3096 : 640 = 4{,}8^{\text{at}}$. — Für gleiche Höhenlage der Schultern, d. h. $c = 0$, wird $A = B = 27^{\text{kg}}$; $C = 90^{\text{kg}}$; das grösste Moment $\mathfrak{M}_1 = {}^1/_8\, p\,l^2$, d. h. ${}^1/_4$ so gross wie für $C = 0$, also $\mathfrak{M}_1 = 4500$, $\sigma = 7^{\text{at}}$. — Dagegen wird $A = B = 0$ und $C = 144^{\text{kg}}$ für $c = -27 : 14{,}746$

$= -1{,}83^{\,cm}$, d. h. wenn die mittlere Schulter um $1{,}83^{\,cm}$ höher liegt als die anderen. Das grösste Moment wird nun $\mathfrak{M}_1 = {}^1/_8\, p\, l^2 - 0$, d. h. ebenso gross wie für $C = 0$, nämlich 18000 mit $\sigma = 28{,}1^{\,at}$.

Die Spannung schwankt also in diesen betrachteten Fällen zwischen $4{,}8$ und $28{,}1^{\,at}$. Dem entsprechen freilich, weil ein biegsamer Holzbalken angenommen war, auch ziemlich beträchtliche Höhenverschiebungen; für einen steiferen Eisenträger würden ähnliche Spannungsunterschiede durch viel geringere Verschiebungen bewirkt werden. Kurze Balken auf mehr als zwei Stützen sind hiernach sehr empfindlich gegen Höhenverschiebungen einzelner Stützpunkte und deshalb nur mit Vorsicht zu verwenden.

Soll eine Balkenbrücke mit zwei Öffnungen gebaut werden, so hat man die Wahl, ob man (Fig. 70) Balken verwenden will, die über beide Öffnungen durchgehen, oder ob man auf dem Mittelpfeiler neben einander zwei Auflager anbringen und die Balken dort unterbrechen will (Fig 71). Letzterer Fall hat den Vorzug, statisch bestimmt zu sein; wenn einer der Pfeiler sich etwas senkt, so werden dadurch die Brückenbalken nicht in Spannung gerathen, vielmehr werden sie widerstandslos dem Pfeiler folgen.

Fig. 70.

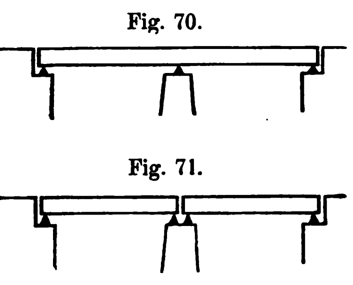
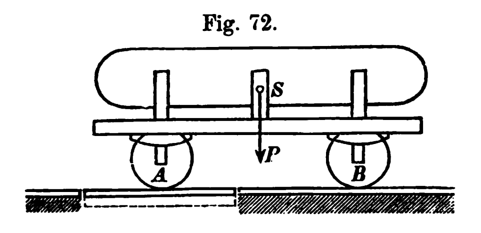


Fig. 71.

Mit der statisch bestimmten Auflagerung eines Trägers auf zwei Stützen hängt auch ein Verfahren zusammen, das Gewicht eines sehr langen, auf einem zweiachsigen Wagen befestigten Dampfkessels zu bestimmen, ohne dass eine zur Aufnahme des ganzen Wagens hinreichende Brückenwaage verfügbar ist. Man fährt in diesem Falle mit der einen Achse auf die Waage (Fig. 72) und ermittelt die Last A, verfährt dann mit der anderen Achse B in derselben Weise und erhält in der Summe $A + B$ das Gesammtgewicht P des belasteten Wagens. Für die Zulässigkeit dieses Verfahrens ist nur erforderlich, dass die Fahrbahn zu beiden Seiten der Waage nicht gar zu uneben sei, damit sich der wagerechte Abstand der Schwerpunkts-Lothrechten von den Achsen nicht merklich ändere. Bei der Verwendung eines dreiachsigen Wagens würde dieses Vorgehen nicht brauchbar sein, weil es höchst unwahrscheinlich ist, dass die Achse, nachdem sie die Waage verlassen hat, noch dieselbe Last trägt wie bei

Fig. 72.

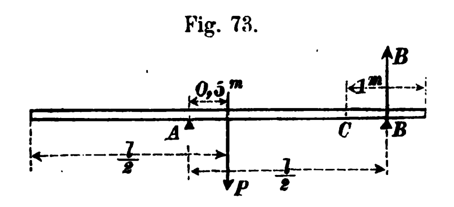


ihrer Stellung auf der Waage, da ja die Plattform der letzteren im belasteten Zustand stets federnd etwas nachgiebt.

Bei dieser Gelegenheit möge noch ein Verfahren angegeben werden, wie man das Gewicht eines Längenmeters von einer Eisenbahnschiene oder einem gewalzten Träger bestimmen kann, wenn die vorhandene Waage zur Wägung des ganzen Stabes nicht ausreicht, der Stab aber auch nicht zerschnitten werden soll. Es sei l die Länge des ganzen Stabes oder Balkens. Von dem rechtsseitigen Ende aus messe man eine Länge $= 1^{m}$ ab (Fig. 73) und bringe unter der Mitte B dieser Länge eine schneidenartige Stütze an. In der Mitte A der übrig bleibenden Länge ($l - 1^{m}$) werde in gleicher Weise eine Schneide A angebracht. Der Schwerpunkt der ganzen Schiene liegt dann um $\frac{1}{2}{}^{m}$, die Schneide B um $\frac{1}{2}l$ von der Schneide A entfernt; der Stützendruck B wird daher

$$B = \frac{P \cdot 0{,}5}{\frac{1}{2}l} = \frac{P}{l},$$

Fig. 73.



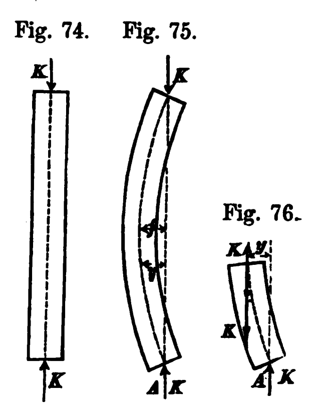
d. h. gleich dem gesuchten Gewicht von einem Längenmeter der Schiene. Dieses Gewicht kann man ermitteln, indem man die Schneide B auf die Brücke einer Waage stützt. — Zur Erklärung diene noch Folgendes: Denkt man sich die Schiene bei C durchschnitten, so befindet sich der rechtseitige Abschnitt auf der Schneide B im (wenn auch unsicheren) Gleichgewichte, ebenso der lange Abschnitt auf der Scheide A. Verbindet man die Theile nun an der Schnittstelle C mit einander, so treten in der Verbindung keine Spannkräfte auf; ebenso wenig wird dies daher in der ungetrennten Schiene vorkommen. Die Schneide B trägt also nur das abgemessene (aber nicht abgetrennte) Schienenstück von 1^{m} Länge. (Dieses Beispiel gehört eigentlich nicht zur Biegungslehre, sondern in Theil 1, 2. Aufl., S. 164.)

6. Knickfestigkeit.

Wird ein ursprünglich völlig gerader und gleichmässiger Stab an den Enden durch Druckkräfte K belastet (Fig. 74), die genau in die Mittellinie des Stabes fallen, so ist nur eine geradlinige Verkürzung des Stabes möglich. Dies zeigt sich auch in Wirklichkeit, solange die Länge des Stabes im Verhältnisse zur Querschnittbreite nicht erheblich ist. Bei grösserer Länge aber ist mit der Wirkung der Kräfte K eine seitliche Ausbiegung verbunden, die offenbar daher rührt, dass die vorstehend genannten Bedingungen der völligen Geradlinigkeit und Gleichmässigkeit und des vollkommenen Zusammenfallens der Druckkräfte mit der Mittellinie des Stabes in aller Schärfe nicht zu erfüllen sind. Bei allmählichem

Anwachsen der Kräfte erfolgt schliesslich eine Zerstörung durch gleichzeitige Zusammendrückung und Biegung, und man nennt diesen Vorgang Knickung.

Wir nehmen an, der Stab habe sich um ein gewisses Mafs gebogen und befinde sich im Gleichgewichte; seine Spannungen seien noch innerhalb der Elasticitätsgrenze. Die beiden Kräfte K sollen in ihrer ursprünglichen Richtung und Lage verblieben sein (Fig. 75). Führt man an irgend einer Stelle, wo die Ausbiegung gleich y ist, einen Querschnitt durch den Stab und betrachtet das Stück unterhalb des Schnittes (Fig. 76), so müssen an dem Schnitte innere Kräfte auftreten, die der bei A angreifenden Kraft K das Gleichgewicht halten. Wegen der Geringfügigkeit der Biegung innerhalb der Elasticitätsgrenze kann man den Schnitt als rechtwinklig zur Richtung von K annehmen. Die Richtungslinie von K geht um y an dem Schwerpunkte der Querschnittfigur vorbei. Zur Erleichterung der Spannungsberechnung denken wir uns an einem Punkte des unteren Stabtheils 2 mit K gleiche und parallele,



aber einander entgegengesetzte Kräfte so hinzugefügt, dass sie durch den Schwerpunkt der Querschnittfigur gehen; hierdurch wird an dem Gleichgewichtszustande nichts geändert. Die ursprünglich gegebene und die entgegengesetzt hinzugefügte Kraft K bilden ein Kräftepaar vom Momente $K \cdot y$, welches an der rechten, konkaven Seite eine Druckspannung $\sigma = \frac{K \cdot y \cdot e}{J}$ hervorbringt. Die zweite hinzugefügte Kraft K aber ist eine durch den Schwerpunkt des Schnittes gehende Druckkraft und erzeugt eine gleichmässig über die Schnittfläche vertheilte Druckspannung $\frac{K}{F}$. Diese vereinigt sich mit der aus dem Biegungsmomente hervorgehenden Druckspannung zu der an dem Schnitt überhaupt vorkommenden grössten Druckspannung

$$\sigma'' = \frac{K}{F} + \frac{K y e}{J}.$$

Nennt man f die stärkste Durchbiegung, welche in der Mitte der Länge l auftreten muss, so wird die überhaupt grösste an dem Stabe vorkommende Spannung die Druckspannung σ'', deren absoluter Werth

1) $$\sigma'' = \frac{K}{F} + \frac{Kfe}{J}.$$

Man könnte erwarten, dass die unbekannte Durchbiegung f mit Hülfe der Gleichung der Biegungslinie zu ermitteln sein würde; doch gelingt ein derartiger Versuch nicht in befriedigender Weise, wie in Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, ausführlich entwickelt wird. Der Grund des Misserfolges liegt in dem Umstande, dass die Biegung nur eine Folge zufälliger Abweichungen ist, deren Grösse nicht zahlenmässig feststeht, sondern nur aus der Erfahrung und den Umständen eines bestimmten Falles ermittelt werden kann.

Bei den Belastungsfällen Fig. 58 und 59, sowie (Gl. 14, S. 49 und Gl. 18, S. 50) haben wir die Durchbiegung f eines Stabes auf die Form

$$f = \frac{1}{12}\frac{\sigma}{E}\frac{l^2}{e} \text{ bezw. } \frac{5}{48}\frac{\sigma}{E}\frac{l^2}{e}$$

gebracht, und auf ähnliche Form lässt sie sich auch in den einfachen, in der Tabelle auf S. 47 behandelten Fällen bringen; nur hat die Ziffer vor $\frac{\sigma}{E}$ in jedem Fall ihren besonderen Werth. Daher können wir auch bei der jetzt vorliegenden Aufgabe mit einiger Berechtigung fe verhältnisgleich mit l^2, also etwa

$$fe = \alpha l^2 \text{ setzen.}$$

Da bei einem nachgiebigen, wenig steifen Stoffe eine starke Durchbiegung eher erwartet werden darf als bei einem verhältnismässig starren Körper, so ist die Ziffer α eine in erster Linie von dem Material abhängige Verhältniszahl, und zwar darf der Erfahrung zufolge etwa gesetzt werden: für Stabeisen $\alpha = 0{,}0001$, für Gusseisen und Holz $\alpha = 0{,}0002$. Natürlich sind dies nur rohe Mittelwerthe; eingehendere Versuche haben gezeigt, dass α nicht ausschliesslich nur von dem Stoffe, sondern auch noch, allerdings in nicht ganz einfacher Weise, von dem Längenverhältnis abhängt; doch können wir darauf in diesem Buche nicht näher eingehen.

Hiernach wird dann aus Gl. 1:

$$\sigma'' = K\left(\frac{1}{F} + \frac{\alpha l^2}{J}\right).$$

Da der Stab die Freiheit hat, sich nach irgend einer Richtung auszubiegen, so muss man für vorstehende Gleichung den ungünstigsten Fall, d. h. für J den kleinstmöglichen Werth annehmen. Ist der Querschnitt z. B. ein Rechteck, d die kleinere, h die grössere Seite, so ist $J = \frac{1}{12} h d^3$ zu setzen, in Bezug auf die zur Kante h parallele Schwerpunktsachse. In der Richtung der kleineren Seite d ist dann die Ausbiegung zu erwarten. Führt man noch den zu J gehörigen kleinstmöglichen Trägheitshalbmesser i ein, indem man $J = Fi^2$ setzt, so wird

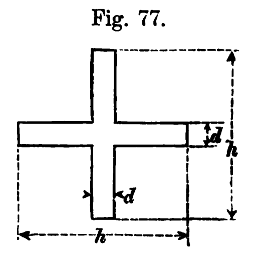
2) $$\sigma'' = \frac{K}{F}\left(1 + \alpha\frac{l^2}{i^2}\right), \text{ oder auch mit } n = \left(1 + \alpha\frac{l^2}{i^2}\right)$$

3) $$F = \frac{K}{\sigma''} \cdot n \quad \text{und} \quad K = \frac{F\sigma''}{n}.$$

Der Klammerausdruck n wird für $l = 0$ zu Eins und wächst mit zunehmender Stablänge. Ist σ'' die zulässige Druckspannung, so würde $K:\sigma''$ der bei einer Berechnung auf reine Druckfestigkeit erforderliche Querschnitt sein. Der Zerknickungsfaktor $n = 1 + \alpha\frac{l^2}{i^2}$ giebt an, in welchem Verhältnisse der Querschnitt wegen der Möglichkeit des Zerknickens vergrössert werden muss.

Bei einem auf Knicken beanspruchten Stabe muss die Querschnittsform zweckmässig so gewählt werden, dass bei gegebener Fläche F das Quadrat des kleinsten Trägheitshalbmessers i möglichst gross werde. Man muss den Querschnitt so anordnen, dass zwei zu einander rechtwinklige Symmetrieachsen gleich grosses Trägheitsmoment liefern. Jede Abweichung von dieser Form würde wohl in einer Richtung die Steifigkeit vergrössern, aber nur zum Schaden der Steifigkeit in anderer Richtung. Von allen rechteckigen Querschnitten verdient also das Quadrat den Vorzug. Der Kreis kommt bei den natürlichen Baumstämmen zur Anwendung. Bei Verwendung von Eisen wird man hohlen

Fig. 77.



Querschnittsformen (Ring, hohlem Quadrat) und gerippten Formen, z. B. dem Kreuzquerschnitte mit gleichen Rippen (Fig. 77) den Vorzug geben; doch ist letzterer Querschnitt nicht so günstig, weil er ein viel kleineres J hat als obige Hohlquerschnitte.

Die Zerknickungslänge l ist abhängig von der Art der Befestigung der Stabenden und wird nur bei reibungsloser Spitzenlagerung gleich der Stablänge selbst. Hierüber und eine Reihe anderer Entwicklungen über Knickfestigkeit vergleiche man Keck, Vorträge über Elasticitätslehre. I. Theil.

Beispiele: Für einen Schmiedeeisenstab von 100 cm Länge, dessen Querschnitt ein Quadrat von 2 cm Seite, ist $i^2 = 2^2 : 12$, und der Zerknickungsfaktor

$$n = 1 + 0{,}0001 \cdot \frac{100^2}{2^2} \cdot 12 = 4\,.$$

Bei 700 at zulässiger Druckspannung wird daher die zulässige Belastung

$$K = 2^2 \cdot 700 : 4 = 700 \text{ kg}\,.$$

Für einen kreuzförmigen Querschnitt (Fig. 77) ist nach S. 25

$$J = {}^1/_{12}\, d\, h^3 \left(1 + \frac{d^2}{h^2} - \frac{d^3}{h^3}\right),$$

$$F = 2\, d \cdot h - d^2 = d \cdot h \left(2 - \frac{d}{h}\right).$$

Bei der Berechnung von i^2 und n kann man (im Hinblick auf die Unsicherheit des Werthes α) wegen der Kleinheit von $d : h$ dieses Glied und noch mehr seine höheren Potenzen gegen 1 vernachlässigen und hat dann angenähert

$$i^2 = \frac{J}{F} = \frac{d \cdot h^3}{12 \cdot 2\, d \cdot h} = \frac{h^2}{24}, \quad \text{also}$$

$$n = 1 + \alpha\, 24\, \frac{l^2}{h^2}\,.$$

Für Schmiedeeisen und $l = 20\,h$ ist $n = 1 + 0{,}96$ oder rund $n = 2$ (Aufrundungen sind bei der Berechnung von n sehr angebracht.) Ist dann z. B. $d = 2{,}5$ cm, $h = 20$, also $l = 400$ cm, so wird

$$F = 2 \cdot 2{,}5 \cdot 20 - 2{,}5^2 = 93{,}75 \text{ qcm}$$

und mit $\sigma'' = 700$ ergiebt sich die zulässige Belastung

$$K = \frac{700 \cdot 93{,}75}{3} = 32\,813 \text{ kg}\,.$$

Ist der Stab aus Gusseisen, so wird α doppelt so gross, daher für obigen Kreuzquerschnitt

$$n = 1 + 1{,}92 = 2{,}92\,, \text{ rund } 3\,.$$

Nimmt man wiederum $\sigma'' = 700$, so wird

$$K = \frac{700 \cdot 93{,}75}{3} = 21\,875 \text{ kg}\,. \text{ —}$$

Für eine hohle Gusseisensäule von dem äusseren und inneren Halbmesser R bezw. r ist

$$J = \frac{1}{4}(R^4 - r^4)\pi; \quad F = (R^2 - r^2)\pi,$$

mithin $i^2 = \frac{1}{4}(R^2 + r^2)$, daher

$$n = 1 + 0{,}0002 \cdot 4 \frac{l^2}{R^2 + r^2};$$

mit $r = 0{,}9\,R$ wird dann

$$n = 1 + 0{,}00044 \frac{l^2}{R^2}.$$

Ist dann noch $l = 40\,R$, so wird $n = 1{,}7$.

Für $R = 10^{\text{cm}}$, $l = 400^{\text{cm}}$ und $\sigma'' = 700^{\text{at}}$ wird nun $F = 59{,}69^{\text{qcm}}$ und

$$K = \frac{700 \cdot 59{,}69}{1{,}7} = 24\,576^{\text{kg}}.$$

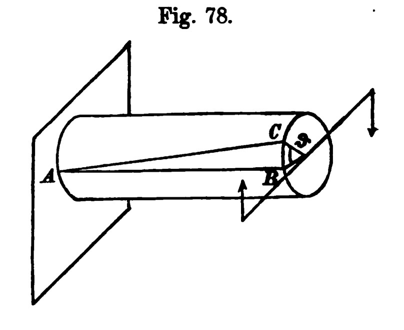
Ein weiteres Zahlenbeispiel s. S. 82/83.

7. Verdrehungsfestigkeit (Torsionsfestigkeit).

a) Stab von kreisförmigem und kreisringförmigem Querschnitte.

Greifen an beiden Enden eines Cylinders gleiche Kräftepaare von entgegengesetztem Drehsinn an, deren Ebenen rechtwinklig zur Cylinderachse sind, so heben sich diese Paare am starren Körper bekanntlich ohne Weiteres auf (1. Theil, 2. Aufl., S. 108); für den elastisch-festen Körper gilt dies aber nur unter der Voraussetzung, dass seine Widerstandsfähigkeit hinreicht und auch dann erst, nachdem eine entsprechende Formänderung stattgefunden hat. Diese Formänderung besteht in einer Verdrehung; die einzelnen Querschnittebenen verdrehen sich derartig gegen einander, das die ursprünglich geraden Cylinderseiten (z. B. AB) in sehr steile Schraubenlinien (z. B. AC) übergehen. (In Fig. 78 ist das linkseitige Ende des Cylinders festgehalten gedacht.) Die Verdrehungen der Querschnitte gegen einander sind als Gleitungen der einzelnen Querschnittstheile aufzufassen, mit denen das Auftreten entsprechender Schubspannungen verbunden ist. Versuche haben ferner gezeigt, dass Halbmesser eines Querschnitts auch nach der Formänderung noch geradlinig

Fig. 78.

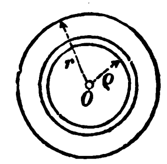


sind. Daraus folgt, dass die Gleitung in der Achse bei O (Fig. 79) Null ist und verhältnisgleich mit dem Abstande ϱ von O nach aussen zunimmt. Da nun nach Gl. 1, S. 16

1) $$\gamma = \frac{\tau}{G},$$

d. h. die Gleitung verhältnisgleich mit der Schubspannung ist, so muss auch die Schubspannung mit ϱ verhältnisgleich sein. Nennt man also die Schubspannung in den Abständen ϱ und r von der Mitte τ_ϱ bezw. τ, so ist (ähnlich wie für die Biegungsspannungen Gl. 1, S. 19)

Fig. 79.



2) $$\tau_\varrho : \tau = \varrho : r.$$

Nimmt man aus dem kreisförmigen Querschnitt einen dünnen Ring vom Halbmeser ϱ und von der Fläche dF heraus, so tritt an diesem durchweg die gleiche Schubspannung τ_ϱ in tangentialer Richtung, d. h. rechtwinklig zum Halbmesser ϱ auf; das giebt für die Ringfläche dF eine gesammte innere Tangentialkraft $dF \cdot \tau_\varrho$, welche in Bezug auf die Cylinderachse ein Spannungsmoment

$$d\mathfrak{M} = \tau_\varrho \cdot dF \cdot \varrho \quad \text{liefert.}$$

Dies ist das der weiteren Verdrehung entgegenwirkende Moment des Ringes. Summirt man über den ganzen Querschnitt, so ist das gesammte Spannungsmoment mit Rücksicht auf Gl. 2

$$\mathfrak{M} = \frac{\tau}{r}\int dF \cdot \varrho^2,$$

welches dem verdrehenden Kräftepaare gleich sein muss. Wir können daher $\mathfrak{M}$ unmittelbar als das Verdrehungsmoment bezeichnen. Der Werth $\int dF \cdot \varrho^2$ bedeutet nach (1. Theil, 2. Aufl., S. 274) das polare Trägheitsmoment J_0 des Querschnitts in Bezug auf die Achse O des Stabes. Sonach wird

3) $$\frac{\tau}{r} \cdot J_0 = \mathfrak{M}.$$

Diese Formel ist ähnlich gestaltet wie die Gl. 3, S. 22, für die Biegungsspannung. Nur kommt hier das polare Trägheitsmoment in Frage.

Der Winkel ϑ, um den sich der eine Querschnitt gegen einen um l davon entfernten verdreht, heisst der Verdrehungswinkel.

Die Berechnung desselben folgt leicht aus Fig. 78. Die Abweichung der Schraubenlinie AC von der Geraden AB ist die der Schubspannung τ der äusseren Mantelfläche entsprechende Gleitung; daher wird der Verdrehungsbogen $BC = \gamma l$. Weil aber auch $BC = r\vartheta$, so wird $r\vartheta = \gamma l$ oder

$$4) \qquad \vartheta = \frac{\tau}{G}\frac{l}{r} = \frac{\mathfrak{M} l}{G J_0}$$

(entsprechend Gl. 9, S. 47).

Diese Gleichungen gelten für kreis- und kreisringförmige Querschnitte. Für Vollkreise ist (nach 1. Theil, 2. Aufl., S. 274) $J_0 = {}^1\!/_2 r^4 \pi$, womit Gl. 3 übergeht in:

$$\tau \cdot {}^1\!/_2 r^3 \pi = \mathfrak{M}.$$

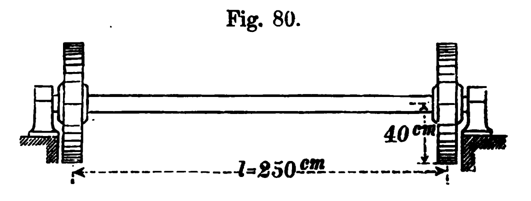
Für einen Ring von den Halbmessern R und r ist

$$J_0 = {}^1\!/_2 (R^4 - r^4)\pi.$$

Die Formeln 2—4 sind nicht nur für den ruhenden Cylinder, sondern auch für den gleichförmig um seine Achse sich drehenden Cylinder verwendbar, weil die dieser Drehung entsprechenden Ergänzungskräfte (Centrifugalkräfte) in den einzelnen Theilen des Körpers nur (meist unbedeutende) Zugspannungen hervorrufen.

Beispiel: Auf einer Maschinenwelle (Fig. 80) befinden sich zwei Zahnräder im Abstand $l = 250$ cm von einander. Am Umfange des rechtseitigen vom Halbmesser $= 40$ cm wirke eine Kraft $K = 1000$ kg. Dadurch entsteht ein Drehmoment $\mathfrak{M} = 40\,000$ cmkg, welches durch ein gleiches widerstehendes Moment am anderen Zahnrade aufgehoben werden möge. Die zulässige Schubspannung möge mit Rücksicht auf mögliche Unregelmässigkeiten der Bewegung nur zu $\tau = 200$ at angenommen werden, dann gilt für den erforderlichen Wellenhalbmesser r

Fig. 80.



$$200 \cdot {}^1\!/_2 r^3 \pi = 40\,000 \quad \text{oder rund} \quad r = 5 \text{ cm}.$$

Die elastische Verdrehung der beiden Zahnräder gegen einander beträgt (Gl. 4) mit $G = 0{,}4\,E = 800\,000$ für Stabeisen

$$\vartheta = \frac{200}{800\,000}\frac{250}{5} = \frac{1}{80},$$

oder in Graden $0^0\,43'$.

b) Stab von rechteckigem Querschnitte.

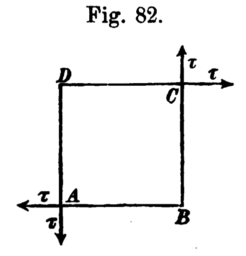
So einfach die Drehungsfestigkeit eines cylindrischen Stabes zu berechnen war, so verwickelt werden die Verhältnisse bei Stäben anderer Querschnittform. Ein für diese Untersuchung wichtiges Ergebnis folgt aus einer Eigenschaft der Schubspannungen an einem würfelförmigen Körper. Denkt man sich aus einem Körper, der durch schiebende, parallel der Bildebene wirkende Kräfte angegriffen ist, einen Würfel von der Seite = 1 herausgeschnitten (Fig. 81) und nimmt an, dass an der oberen Fläche DC eine wagerecht nach rechts gerichtete Schubspannung τ auftritt, der an AB eine gleiche nach links gerichtete entgegen wirkt, so fordert das Gleichgewicht gegen Drehung, dass dieses Kräftepaar durch ein gleiches entgegengesetztes aufgehoben werde. Die ersten beiden Schubspannungen τ bedingen also das Auftreten von Schubspannungen gleicher Grösse an den Flächen AD und BC (Fig. 82), also Satz:

Fig. 81.

An den vier zu einer Ebene rechtwinkligen Seitenflächen eines rechtwinkligen Parallelepipedes treten in den Richtungen parallel zu jener Ebene stets gleiche Schubspannungen auf.

Gehört nun die Seitenfläche AD etwa der freien Mantelfläche eines auf Drehung beanspruchten Körpers an, so kann an dieser keine rechtwinklig zur Mantelfläche gerichtete Schubspannung auftreten, und damit wird auch die in AB *rechtwinklig* zu der Mantelfläche gerichtete Schubspannung Null. Hiernach müssen an einem solchen Körper die am äusseren Rande eines Querschnitts auftretenden Schubspannungen nothwendig *parallel* der Begrenzung des Querschnittes sein. Ist aber $ABCD$ (Fig. 83) der rechteckige Querschnitt des Stabes mit den Seiten $AB = b$, $BC = h$, wobei $h \geqq b$, so kann an einer Kante, z. B. bei D gar keine Schubspannung auftreten, weil sowohl die zu AD, wie auch die zu CD rechtwinklige Schubspannung verschwinden muss. Es folgt also das auf den ersten Blick überraschende Ergebnis, dass

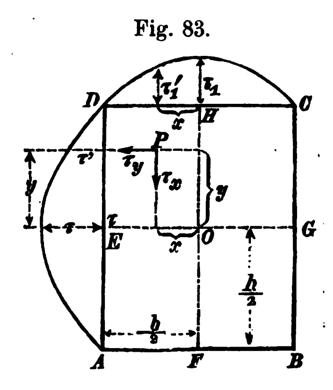
Fig. 82.



die von der Achse des Stabes am weitesten entfernten Querschnittstheile an den vier Ecken spannungslos sind.

Über die Veränderlichkeit der längs des Randes eines Querschnittes auftretenden Schubspannungen giebt die Grösse der Gleitung an den verschiedenen Stellen der Mantelfläche des Stabes Auskunft (s. C. Bach, Elasticität und Festigkeit). Versieht man die Mantelfläche des Stabes mit einem Netze von Quadraten und beobachtet diese, nachdem die Verdrehung stattgefunden hat, so findet man, dass die Quadrate sich im Allgemeinen in Rhomben verwandelt haben. Die Abweichung der Rhomben von den Quadraten kennzeichnet unmittelbar die Gleitung an den verschiedenen Stellen. Dabei bestätigt sich zunächst, dass an den Kanten $ABCD$ die Figuren quadratisch geblieben sind. Ferner ergiebt sich, dass die Gleitungen in denjenigen Punkten E und G des Umfanges, welche der Achse am nächsten liegen, am stärksten sind, während sie in den Mittelpunkten F und H der kurzen Seiten zwar auch einen Grösstwerth erreichen, der aber hinter E und G zurückbleibt. Die Spannungen sind mit den Gleitungen verhältnisgleich. Sind τ und τ_1 die Schubspannungen an den Punkten E und H, so kann man diese den Entfernungen von der Achse umgekehrt proportional annehmen, d. h.

Fig. 83.



5) $$\tau_1 : \tau = b : h\,.$$

Längs der Seitenfläche AD muss die Spannung nach einem stetigen Gesetze sich ändern; das einfachste der hier wahrscheinlichen Gesetze ist das parabolische, das man durch die über der Sehne AD stehende Parabel darstellen kann, wenn man die Werthe τ' rechtwinklig zur ihrer Richtung als Ordinaten zu ihren Angriffspunkten aufträgt. Nimmt man diese parabolische Vertheilung der Schubspannung über der Mantelfläche als gültig an, so wird für die Spannung τ' im Abstand y von der Mitte:

$$y^2 : {}^1/_4\, h^2 = (\tau - \tau') : \tau \quad \text{oder}$$

6) $$\tau' = \tau\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right).$$

Ebenso wird in einem Abstand x von der Mitte H der kürzeren Seite die Spannung

7) $$\tau'_1 = \tau_1\left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right), \quad \text{oder wegen Gl. 5:}$$

8) $$\tau' = \tau\frac{b}{h}\left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right).$$

Von E bis O und von H bis O muss die Spannung bis auf Null abnehmen, und es steht nichts im Wege, dafür ein geradliniges Gesetz anzunehmen.

Betrachtet man nun einen beliebigen Punkt P des Querschnitts mit den Koordinaten x und y, so kann man die dort herrschende Spannung zerlegen in τ_x und τ_y rechtwinklig zu x und y. Man kann dann mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit annehmen, dass τ_x und τ_y in geradliniger Beziehung zu τ' bezw. τ_1' stehen, d. h.

9) $$\tau_x : \tau' = x : {}^1\!/_2 b \quad \text{und}$$

10) $$\tau_y : \tau_1' = y : {}^1\!/_2 h, \quad \text{oder}$$

11) $$\tau_x = \frac{2\tau}{b}x\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) \quad \text{und}$$

12) $$\tau_y = 2\tau\frac{b}{h^2}y\left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right).$$

Leicht überzeugt man sich, dass auch an keinem Punkte P im Innern des Querschnitts die Spannung grösser als die Randspannung τ in den Punkten E und G werden kann. An der Stelle P ist nämlich die Gesammtspannung

$$\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = \tau\sqrt{\frac{4x^2}{b^2}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)^2 + \frac{4b^2}{h^4}y^2\left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right)^2}.$$

Setzen wir den Werth unter dem letzten Wurzelzeichen $= U^2$, so ist, weil

$$\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)^2 \leqq 1 \quad \text{und} \quad \frac{4b^2}{h^4}y^2 < 1,$$

$$U^2 < \frac{4x^2}{b^2} + \left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right)^2, \quad \text{d. h.} \quad < \frac{4x^2}{b^2} + 1 - \frac{8x^2}{b^2} + \frac{16x^4}{b^4}, \quad \text{oder}$$

$$U^2 < 1 - \frac{4x^2}{b^2} + \frac{16x^4}{b^4}, \quad \text{d. h.} \quad < 1 - \frac{4x^2}{b^2}\left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right).$$

Die Grösse auf der rechten Seite ist aber jedenfalls $\leqq 1$, mithin ist U ein echter Bruch, d. h.

$$\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} \leqq \tau.$$

Es muss nun noch die stärkste Schubspannung τ auf das Verdrehungsmoment $\mathfrak{M}$ zurückgeführt werden. Dies geschieht mittels der Momentengleichung wie folgt:

An einem Flächentheilchen $dF = dx \cdot dy$ bei P wirken die inneren Kräfte $\tau_x \cdot dF$ und $\tau_y \cdot dF$ und liefern in Bezug auf die Achse O des Stabes das innere Moment $(\tau_x x + \tau_y y)\, dF$. Daher gilt für das Verdrehungsmoment

$$\mathfrak{M} = \int (\tau_x x + \tau_y y)\, dF \quad \text{oder}$$

$$\mathfrak{M} = 2\tau \int \frac{1}{b}\left\{x^2\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) + \frac{b}{h^2} y^2 \left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right)\right\} dF$$

$$= 2\tau\left\{\frac{1}{b}\int dF \cdot x^2 - \frac{4}{h^2 b}\int dF \cdot x^2 y^2 + \frac{b}{h^2}\int dF \cdot y^2 - \frac{4}{h^2 b}\int dF \cdot x^2 y^2\right\}.$$

Nun ist $\int dF \cdot x^2 = J_2$ das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse OH; $\int dF \cdot y^2 = J_1$ das Trägheitsmoment für die Achse OE; wird aber $\int dF \cdot y^2 = \frac{1}{12} b h^3$ noch mit $\frac{b}{h^2}$ multiplicirt, so entsteht daraus $\frac{b}{h^2}\int dF \cdot y^2 = \frac{1}{12} b^2 h = \frac{1}{b} J_2$. Endlich ist noch zu lösen

$$\int dF \cdot x^2 y^2 = \int dx \cdot dy \cdot x^2 y^2.$$

Ein wagerechter Flächenstreifen liefert hierzu den Beitrag

$$y^2 dy \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} x^2 dx = 2 y^2 dy \int_0^{\frac{b}{2}} x^2 dx = y^3 dy \frac{b^3}{12},$$

die ganze Fläche also den Werth

$$\int dF \cdot x^2 \cdot y^2 = \frac{2 b^3}{12}\int_0^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{b^3 h^3}{12 \cdot 12}.$$

Setzt man diese Werthe oben ein, so entsteht:

$$\mathfrak{M} = \tau\left\{\frac{4}{b} J_2 - \frac{16}{h^2 b}\frac{b^3 h^3}{144}\right\} = \tau\left\{\frac{4}{b} J_2 - \frac{4}{3}\frac{J_2}{b}\right\} = 4\tau\frac{J_2}{b}\left(1 - \frac{1}{3}\right).$$

13) $$\mathfrak{M} = \frac{8}{3}\tau\frac{J_2}{b} = \frac{4}{3}\tau\frac{J_2}{{}^1\!/_2 b} = \frac{2}{9}\tau \cdot F \cdot b \quad \text{und ebenso}$$

$$\mathfrak{M} = \frac{4}{3}\tau_1\frac{J_1}{{}^1\!/_2 h}, \quad \text{oder}$$

14) $$\tau = \frac{3}{8}\frac{\mathfrak{M} b}{J_2} = 4{,}5\frac{\mathfrak{M}}{h \cdot b^2}; \quad \tau_1 = \frac{3}{8}\frac{\mathfrak{M} h}{J_1} = 4{,}5\frac{\mathfrak{M}}{b h^2}, \quad \text{d. h.:}$$

Bei einem auf seine Drehungsfestigkeit beanspruchten Stabe von rechteckigem Querschnitte tritt

die stärkste Schubspannung τ an denjenigen Punkten der Umfangslinie auf, welche der Stabachse am nächsten liegen, nämlich in dem Abstand $1/2\, b$. Für die Drehungsfestigkeit ist das auf die längere Mittellinie bezogene (kleinere) Trägheitsmoment $J_2 = 1/12\, h b^3$ massgebend.

Beispiele: 1) Ist der Querschnitt ein Quadrat von der Seite d, so wird

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{9} F d \tau = 0{,}222\, F^{3/2} \tau = 0{,}222\, d^3 \tau ;$$

2) beim Kreise vom Durchmesser d wird

$$\mathfrak{M} = \frac{F r}{2} \tau = \frac{1}{4} F d \tau = 0{,}282\, F^{3/2} \tau = 0{,}2\, d^3 \tau .$$

Bei gleichem Querschnitt F ist also der Kreis, bei gleicher Breite (Durchmesser = Quadratseite) das Quadrat gegen $\mathfrak{M}$ widerstandsfähiger.

Der Verdrehungswinkel ϑ eines Stabes von rechteckigem Querschnitte wäre nach der im Querschnittspunkte E (Fig. 83) herrschenden Spannung τ und der daraus folgenden Gleitung $\gamma = \tau : G$ zu $\frac{\tau}{G} \frac{l}{1/2\, b}$, d. h. mittels Gl. 14, S. 74, zu $\frac{3}{4} \frac{\mathfrak{M} l}{G J_2}$ zu erwarten, nach der im Punkte H herrschenden Spannung $\tau_1 = \tau \frac{b}{h}$ aber zu

$$\frac{\tau_1}{G} \frac{l}{1/2\, h} = \frac{3}{4} \frac{\mathfrak{M} l}{G J_1} .$$

In Wirklichkeit verdrehen sich die beiden Symmetrieachsen des Querschnitts annähernd um das arithmetische Mittel dieser beiden Werthe, d. h. es ist ungefähr

15) $$\vartheta = \frac{3}{8} \frac{\mathfrak{M} l}{G} \left(\frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_1} \right) .$$

Die beiden Symmetrieachsen bleiben zu einander rechtwinklig; die übrigen vom Mittelpunkte aus gezogenen Radien verdrehen sich um verschiedene Winkel und treten aus der ursprünglichen Querschnittebene heraus, so dass diese in eine krumme Fläche übergeht. Bessere Übereinstimmung mit Bauschinger's Versuchen (Civilingenieur 1881, S. 115 u f.) ergiebt sich noch, wenn man $3/8 = 0{,}375$ (in Gl. 15) mit 0,3 vertauscht, also setzt:

$$\vartheta = 0{,}3 \frac{\mathfrak{M}}{G} \left(\frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_1} \right) l .$$

Nach Einführung von $\mathfrak{M} = \frac{8}{3} \tau \frac{J_2}{l}$ (Gl. 13) wird hieraus

16) $$\vartheta = 0{,}8 \frac{\tau}{G} \frac{l}{b} \left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right) = 0{,}8 \frac{\tau}{G} \frac{l}{b} \left(1 + \frac{b^2}{h^2}\right).$$

8. Einfache Fachwerkbalken auf zwei Stützen.

a) Art der Berechnung der Spannkräfte.

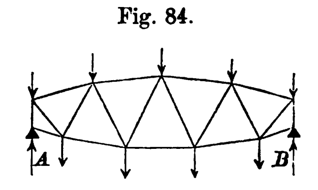
An Stelle der S. 24 und 30 behandelten Balken, die entweder aus einem Stücke bestanden, oder, wenn auch aus Theilen zusammengesetzt, doch einen möglichst stetig zusammenhängenden Körper bildeten (S. 36), kann man auch gegliederte Stabanordnungen verwenden, zu deren Grundgedanken schon die Betrachtung der Gelenkstangen-Verbindungen (1. Theil, 2. Aufl., S. 187) geführt hatte; es sind dies die einfachen Fachwerke.

Ein einfaches Fachwerk besteht meist in einer Aneinanderreihung (Verbindung) von Gelenkstangen-Dreiecken, von denen je zwei benachbarte eine Seite gemeinsam haben. Wir behandeln im Folgenden nur dieses einfache Dreiecksfachwerk.

Wird ein Fachwerk auf Stützen gelegt, deren eine nur in einer bestimmten (lothrechten) Richtung Widerstände leisten kann, so bildet es einen Fachwerkbalken oder Fachwerkträger (Fig. 84).

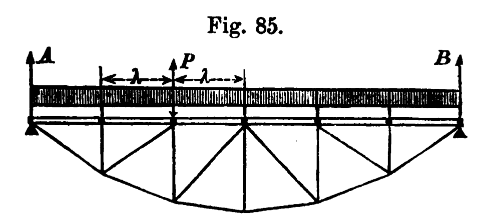
Eine Stange, welche durch zwei reibungslose Gelenke mit anderen verbunden ist, erfährt, wenn die äusseren Kräfte nur in diesen Gelenkpunkten angreifen (nach 1. Theil, 2. Aufl., S. 174), eine Spannkraft, deren Richtungslinie in die Verbindungsgerade der beiden Gelenkpunkte fällt. Ist diese Verbindungsgerade dann zugleich die Mittellinie des Stabes, so wird letzterer nur auf reinen Zug oder Druck beansprucht, wobei sich die Spannung in günstigster Weise gleichmässig über den ganzen Stab vertheilt. Die gedrückten Stäbe müssen freilich auf Knickfestigkeit berechnet werden. Bei einem Fachwerke mit reibungslosen Gelenken und mit Kraftangriff in den Gelenkpunkten liegen somit die inneren Spannkräfte der Stäbe nach Richtung und Lage fest, nur ihre Grösse muss noch ermittelt werden.

Fig. 84.



Besteht die Belastung nicht von vornherein aus Kräften, die durch die Gelenkpunkte gehen, soll z. B. ein Fachwerkträger eine Brückenbahn tragen, die durch Menschengedränge gleichmässig belastet wird, so ordnet man besondere Zwischenbalken an, welche die unmittelbare Belastung aufnehmen und auf Gelenkpunkte des Fachwerks übertragen. Diese Zwischenbalken, welche in Fig. 85 oberhalb des Fachwerks gezeichnet sind, wiewohl sie häufig nicht in dieser Höhe liegen, werden, wenn sie auch in Wirklichkeit meist mit einander in Verbindung stehen, doch für die Rechnung stets als einfache, nur von Gelenkpunkt zu Gelenkpunkt durchgehende kleine Balkenstücke behandelt. Sind diese Zwischenbalken von übereinstimmender Länge λ und auf die Längeneinheit mit p belastet, so erfährt der belastete Gelenkpunkt einen Druck $P = p\lambda$. Diese Kräfte P erzeugen die Stabspannungen des Fachwerks, wobei die Zwischenbalken nicht mehr in Betracht kommen.

Fig. 85.



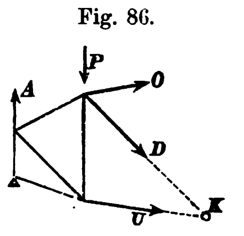
Die Gelenkpunkte heissen auch **Knotenpunkte** oder Knoten des Fachwerks. In solchen Knoten müssen auch die Widerstände A und B der Auflager angreifen, damit die Stäbe keine Biegungsmomente erleiden. (Eine derartige Anbringung der Auflager an den äussersten Enden, wie in Fig. 85, erscheint dem Anfänger wohl zuweilen nicht genügend sicher; jedoch ist zu bemerken, dass die hier benutzten Figuren nur das Netz der Mittellinien des Fachwerks geben; bei der körperlichen Ausbildung des Balkens wird derartig verfahren, dass zu Bedenken dieser Art kein Grund mehr vorliegt, dass aber die Auflagerkräfte dennoch durch die Endknoten gehen.)

Die Stäbe, welche das Fachwerk oben und unten begrenzen, heissen seine Streckbalken oder **Gurten** (Obergurt bezw. Untergurt) mit den Spannkräften O und U, die dazwischen angebrachten Stäbe allgemein **Wandglieder** (weil sie eine volle Blechwand zwischen den Gurten ersetzen); lothrechte Wandglieder heissen **Ständer**, (Pfosten, Vertikalen) mit den Spannkräften V, schräg gerichtete Wandglieder werden **Streben** oder Diagonalen genannt mit den

Spannkräften D. Es ist rathsam, diese Kräfte in der Figur als Zugkräfte einzuführen. Liefert dann die Rechnung positive Werthe für diese Kräfte, so treten in Wirklichkeit Zugkräfte auf; liefert sie negative Werthe, so bedeutet dies Druckkräfte.

Die Berechnung der Auflagerdrücke A und B geschieht ganz so wie bei vollen Balken auf zwei Stützen mittels der Momentengleichungen, da nach S. 4 auch für beliebige steif verbundene Körpergruppen die Gleichgewichtsbedingungen starrer Körper Gültigkeit haben.

Fig. 86.



Zur Auffindung der einzelnen Stabkräfte zerlegt man durch einen Schnitt das Fachwerk in zwei Theile, bringt an den Schnittstellen der Stäbe die Spannkräfte derselben als äussere Kräfte an und stellt für einen der beiden Theile, z. B. für den linkseitigen (Fig. 86), die Gleichgewichtsbedingungen auf. Bei Kräften in der Ebene kann man drei von einander unabhängige Gleichungen anschreiben, kann also für einen Schnitt auch drei Spannkräfte, die nicht durch einen Punkt gehen, daraus berechnen. Bei dem einfachen Dreiecks-Fachwerke kann man sämmtliche Stäbe durch Schnitte treffen, die im Ganzen nicht mehr als drei Stäbe von unbekannter Spannung durchschneiden, so dass deren Spannkräfte statisch bestimmbar sind.

Bei der Anwendung der drei Gleichgewichts-Bedingungen in der ursprünglichen Form (Gleichung der wagerechten Kräfte, Gleichung der lothrechten Kräfte, Gleichung der Momente für irgend einen Punkt) auf einen Fall, wie er z. B. in Fig. 86 vorliegt, würden in jeder der drei Gleichungen die drei Unbekannten O, D und U vorkommen. Zweckmässig ist es, wie auch schon in anderen Fällen (1. Theil, 2. Aufl., S. 162) geschehen, die Rechnung so einzurichten, dass man für jede Unbekannte nur eine Gleichung bekommt. Dies wird in solchen Fällen, wo O, D und U verschiedene Richtungen haben, erreicht, wenn man nur Momentengleichungen anschreibt und zum Drehpunkte jedes Mal den Schnittpunkt derjenigen beiden Stäbe wählt, deren Spannkraft vorläufig nicht verlangt wird. Dies ist der Grundgedanke des Verfahrens von A. Ritter (Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu

Hannover 1861, S. 412). Zur Berechnung der Spannkraft O (Fig. 86) stellt man für die am linkseitigen Trägerstücke wirkenden Kräfte die Momentengleichung in Bezug auf den Schnittpunkt K von D und U auf; dann kommen D und U in dieser Gleichung nicht vor, weil sie beide das Moment Null haben, und man hat für O eine einzige Gleichung ersten Grades.

Völlig reine Fachwerksträger, d. h. solche, welche nur an den Knotenpunkten belastet sind, giebt es eigentlich nicht, weil stets noch das Eigengewicht der Stäbe als gleichförmig vertheilte Last auf alle wagerecht oder schräg liegenden Stäbe biegend einwirkt. Doch sind diese Biegungsspannungen meist so gering, dass sie vernachlässigt werden können. Man berücksichtigt das Eigengewicht der Stäbe dadurch, dass man dasselbe je zur Hälfte auf ihre Enden übertragen denkt, und kann dann Brücken und Dachträger als reine Fachwerke behandeln.

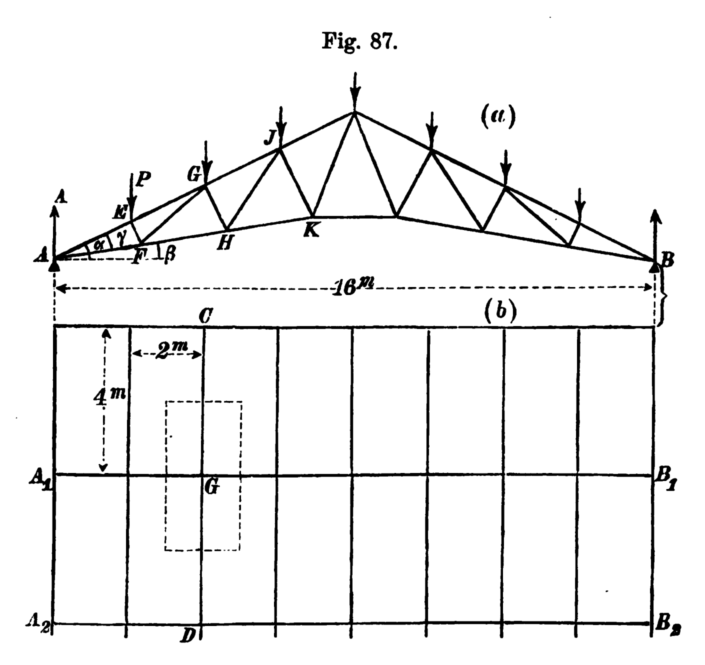
b) Dachträger,

auch Dachbinder oder Dachstühle genannt. Die Dachdeckung (Dachhaut) wird durch ihr Eigengewicht, sowie durch Schnee- und Winddruck belastet, die alle als gleichförmig vertheilte Lasten wirken. Damit nun die Dachträger nur in den Knotenpunkten belastet werden, legt man über die Knotenpunkte Querträger, sogenannte Pfetten (ähnlich den Zwischenträgern in Fig. 86), und diese Pfetten nehmen die Dachlast entweder unmittelbar auf oder durch Vermittlung sogenannter Sparren, so dass die meisten Dachträger als reine Dreiecksfachwerke zu berechnen sind.

Beispiel I: Berechnung der Spannkräfte eines belgischen Dachträgers von 16^m Spannweite. Die Anordnung des Trägers zeigt Fig. 87a. Im Grundrisse (Fig. 87b) mögen die Träger $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ um $A_1 A_2 = 4^m$ von einander abstehen. Die Spannweite werde durch Pfetten, die über den Knotenpunkten des Obergurts liegen, in acht gleiche Theile von 2^m getheilt. Da die gleichmässige Belastung des Grundrisses der Dachfläche sich gleichmässig über die Pfetten vertheilt, und da die Pfetten für die Berechnung als Einzelträger (nur von Dachträger zu Dachträger reichend) angesehen werden, so erkennt man leicht, dass ein beliebiger Knoten G des Obergurts die Last zu tragen hat, welche auf das im Grundrisse punktirte Rechteck von $2^m \times 4^m = 8^{qm}$ entfällt. Rechnet man als Gesammtlast (einschliesslich Schnee- und Winddruck) 180^{kg} für 1^{qm} Grundfläche, so ergiebt sich als Last jedes Knotens des Obergurts $P = 180 \cdot 8 = 1440^{kg}$. Die halb so grosse Belastung, welche auf die Endpunkte A und B kommt, beeinflusst wohl den Druck auf die stützenden Wände, bringt aber, weil sie unmittelbar auf die Stützpunkte übertragen wird, in den Fachwerkstäben keine Spannkraft hervor und bleibt deshalb bei der Berechnung der Stabkräfte am besten ganz

ausser Betracht. Hiernach befinden sich auf dem Träger sieben gleiche Lasten P in gleichen Abständen, so dass jeder Auflagerdruck $A = B = {}^7/_2\, P$

Fig. 87.



wird. Es ist zweckmässig, die Knotenlast im Laufe der Rechnung noch allgemein mit P zu bezeichnen. Am Schlusse kann dann dafür der Zahlenwerth 1440 kg eingeführt werden.

Die beiden Gurte sind durch Stäbe, rechtwinklig zum Obergurt, mit einander verbunden, deren Spannkräfte wir, wenn sie auch nicht lothrecht stehen, doch mit V bezeichnen wollen. Die Spannkräfte der dazwischen eingelegten Streben mögen D heissen.

Der Obergurt habe eine Neigung $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}5$ gegen die Wagerechte; das giebt $\alpha = 26^0\,34'$; $\sin \alpha = 0{,}447$; $\cos \alpha = 0{,}894$; $\sec \alpha = 1{,}119$; dann ist der Abstand zweier Lastpunkte, welcher wagerecht gemessen 2 m beträgt, in der Richtung des Obergurts $A\,E = 2 \cdot 1{,}119 = 2{,}238$ m.

Der Untergurt habe eine Neigung $\operatorname{tg} \beta = {}^1/_6$ gegen die Wagerechte; dies giebt $\beta = 9^0\,28'$; $\sin \beta = 0{,}1645$; $\cos \beta = 0{,}9864$; $\sec \beta = 1{,}014$. Der Winkel $\gamma = E\,A\,F$ zwischen beiden Gurten beträgt hiernach $17^0\,6'$ mit $\sin \gamma = 0{,}294$; $\cos \gamma = 0{,}9568$; $\sec \gamma = 1{,}046$; $\operatorname{tg} \gamma = 0{,}3076$.

Hieraus bestimmt sich $E\,F = A\,E \cdot \operatorname{tg} \gamma = 2{,}238 \cdot 0{,}3076 = 0{,}688$ m, mithin $G\,H = 2 \cdot 0{,}688 = 1{,}376$ und $J\,K = 3 \cdot 0{,}688 = 2{,}064$.

Für die Theile des Untergurts gilt dann: $A\,F = A\,E \sec \gamma = 2{,}238 \cdot 1{,}046 = 2{,}341$.

Die Ermittelung der Spannkräfte soll an dem dritten Fache von links, $GJKH$, gezeigt werden. Führt man einen Schnitt durch dasselbe, welcher das Obergurtstück GJ, die Strebe HJ und das Untergurtstück HK trifft, so betrachtet man das links vom Schnitte verbleibende Stück (Fig. 88), bringt an den Schnittstellen die als Zugkräfte gedachten Spannkräfte O_3, D_2 und U_3 an und stellt für das Gleichgewicht des linkseitigen Abschnittes drei Momenten-Gleichungen auf.

Fig. 88.

Zur Berechnung von U_3 dient der Schnittpunkt J von O_3 und D_2 zum Drehpunkte. Dann ist $JM \perp AK$ der Hebelarm von U_3, und zwar ist $JM = JK \cos\gamma = 2{,}064 \cdot 0{,}9558 = 1{,}973^{\mathrm{m}}$. Der wagerechte Abstand der Knotenpunkte des Obergurts beträgt 2^{m}, daher ist $x = 6^{\mathrm{m}}$, während die Lasten bei E und G die Hebelarme 4 bezw. 2^{m} haben. Es ist empfehlenswerth, beim Aufschreiben der Momenten-Gleichungen eine bestimmte Reihenfolge festzusetzen, um sich vor Auslassungen zu bewahren. Wir schreiben stets zuerst das Moment der gesuchten Spannkraft, dann dasjenige des Auflagerdrucks und schliesslich diejenigen der am betrachteten Trägerstücke vorhandenen Lasten, u. zw. die rechts drehenden Momente mit positivem, die linksdrehenden mit negativem Vorzeichen, also

$$0 = -U_3 \cdot 1{,}973 + 3{,}5\,P \cdot 6 - P \cdot 4 - P \cdot 2\,,$$

woraus man leicht $U_3 = +7{,}60\,P$

findet; das positive Zeichen bedeutet eine Zugkraft.

Zur Berechnung von O_3 dient der Schnittpunkt H von U_3 und D_2 als Drehpunkt. Es ist $AH = 2\,AF = 4{,}682$. Der wagerechte Abstand x' des Drehpunktes vom linkseitigen Auflager ist dann

$$x' = 4{,}682 \cdot \cos\beta = 4{,}682 \cdot 0{,}9864 = 4{,}62\,,$$

der Hebelarm von O_3 aber $GH = 1{,}376$; mithin

$$0 = O_3 \cdot 1{,}376 + 3{,}5\,P \cdot 4{,}62 - P \cdot 0{,}62 - P \cdot 2{,}62 \quad \text{und daraus}$$

$$O_3 = -9{,}40\,P, \quad \text{also Druckkraft.}$$

Zur Berechnung von D_2 dient der Punkt A als Drehpunkt. Fällt man von A eine Winkelrechte AN auf die Richtung von D_2, so ist $AN = AJ$

sin ε. Nun ist $AJ = 3\,AE = 6{,}714$; $\operatorname{tg}\varepsilon = GH : GJ = GH : AE = 1{,}376 : 2{,}238 = 0{,}615$, dem ein Werth $\sin\varepsilon = 0{,}524$ entspricht, mithin

$$AN = 6{,}714 \cdot 0{,}524 = 3{,}517\,.$$

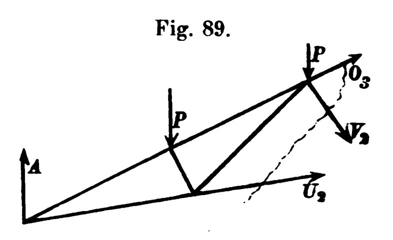
Dann wird, weil der Auflagerdruck den Hebelarm Null hat:

$$0 = -D_2 \cdot 3{,}517 + P \cdot 2 + P \cdot 4\,,$$

mithin $D_2 = 1{,}7058\,P$, also Zugkraft.

Zur Berechnung der Spannkraft V_2 in dem Ständer GH muss man einen Schnitt führen, der ausser diesem Ständer nur noch zwei Stäbe trifft. Dieser Bedingung genügt ein schräger, etwa in der Richtung der Streben geführter Schnitt durch O_3 und U_3, wenn wir der Kürze wegen die Stäbe mit den Buchstaben ihrer Spannkräfte bezeichnen. Es entsteht dann ein linkseitiger Abschnitt nach Fig. 89. Als Drehpunkt ist wiederum A zu wählen. V_2 hat den Hebelarm $AG = 4{,}476$, und man hat die Momentengleichung

Fig. 89.



$$0 = V_2 \cdot 4{,}476 + P \cdot 2 + P \cdot 4$$

und daraus $V_2 = -1{,}34\,P$ (Druckkraft).

In gleicher Weise, wie hier für die Gruppe U_3, O_3, D_2 und V_2 gezeigt, hat man die Berechnung der übrigen Spannkräfte der linkseitigen Hälfte des Trägers durchzuführen; die Spannkräfte der rechten sind dann der linken symmetrisch, so lange Trägerform und Belastung symmetrisch sind.

Führt man schliesslich $P = 1440$ kg ein, so wird $U_3 = 10\,944$ kg; $O_3 = -13\,536$ kg; $D_2 = +2458$ kg; $V_2 = -1930$ kg. Die Abmessungen dieser Stäbe ergeben sich nun wie folgt: Will man die Stäbe aus Schmiedeeisen herstellen, so erfordert, bei 700 at zulässiger Spannung, U_3 einen Querschnitt von $10\,944 : 700 = 15{,}63$ qcm, D_2 einen solchen von $2458 : 700 = 3{,}51$ qcm, dabei ist die Querschnittform gleichgültig, doch sind noch Zuschläge für Nietschwächung erforderlich. Bei den gedrückten Theilen aber, die auf Knickfestigkeit zu berechnen sind, ist auch die Länge und die Querschnittform von Einfluss.

Fig. 90.

Der Stab O_3 hat eine Länge $l = 223{,}8$ cm. Es werde gebildet aus zwei ungleichschenkligen Winkeleisen $10 \cdot 6{,}5 \cdot 1$ cm. Fig. 90 zeigt die zwei Winkeleisen eng zusammengestellt. Das kleinste J erhält man dann für die lothrechte Symmetrieachse, nämlich $J_2 = 189{,}07$. Zur bequemern Stossverbindung pflegt man aber die beiden ∟ Eisen um mindestens 1,5 cm auseinanderzurücken; dann wird für die lothrechte Mittellinie

$$J = \frac{9 \cdot 3{,}5^3}{12} + \frac{1 \cdot 14{,}5^3}{12} - \frac{10 \cdot 1{,}5^3}{12} = 283{,}4\,.$$

Es ist nun noch zu untersuchen, ob nicht für die wagerechte Schwerpunktsachse ein noch kleineres J sich ergiebt. Hierzu kann Fig. 90 unmittelbar benutzt werden, da das Auseinanderrücken auf dieses J keinen Einfluss hat. Theilt man den Querschnitt des einen Winkeleisens durch eine lothrechte Gerade in die beiden Flächentheile $5{,}5$ und 10^{qcm}, deren Schwerpunkte um $4{,}5^{\text{cm}}$ in lothrechtem Sinne von einander abstehen, so ist nach 1. Theil, 2. Aufl., S. 279, Gl. 28 das Trägheitsmoment des einen Winkeleisens in Bezug auf eine wagerechte Schwerpunktsachse

$$J = \frac{1}{12}\,5{,}5 \cdot 1^3 + \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 10^3 + \frac{5{,}5 \cdot 10}{5{,}5 + 10} \cdot 4{,}5^2 = 155{,}6 .$$

Für beide Winkeleisen zusammen wird daher $J_1 = 2 \cdot 155{,}6 = 311{,}2$; demnach ergiebt die Mittelachse das kleinste Trägheitsmoment $J_2 = 283{,}4$, und das Quadrat des kleinsten Trägheitshalbmessers wird daher

$$i^2_{min} = J_2 : F = 283{,}4 : 30{,}0 = 9{,}15 ,$$

$$i_{min} = 3{,}02 ; \quad \frac{l}{i} = \frac{223{,}8}{3{,}02} = 74 ,$$

$$\left(\frac{l}{i}\right)^2 = 5476 .$$

Die zulässige Druckbelastung des Stabes in der Längsrichtung ist daher nach Gl. 2, S. 66

$$K = \frac{F\sigma}{\left(1 + \alpha \frac{l^2}{i^2}\right)} = \frac{31{,}0 \cdot 700}{1 + \frac{5476}{10\,000}} = 14\,030 .$$

Gegenüber einer wirklichen Druckkraft von $13\,536^{\text{kg}}$ ist also genügende Sicherheit vorhanden. Ein Zuschlag für Nietschwächung ist nicht erforderlich.

Der Ständer V_2 von $137{,}6^{\text{cm}}$ Länge werde in ähnlicher Weise aus zwei Winkeleisen $6 \cdot 4 \cdot 0{,}6^{\text{cm}}$ gebildet. Diese zwei Winkeleisen sind ebenfalls um $1{,}5^{\text{cm}}$ auseinandergerückt; dann giebt hier aber die wagerechte Schwerpunktsachse das kleinste Trägheitsmoment $J_2 = 40{,}72$, $F = 11{,}28$, daher kleinstes $i = 1{,}9$; $l : i = 72{,}4$ und

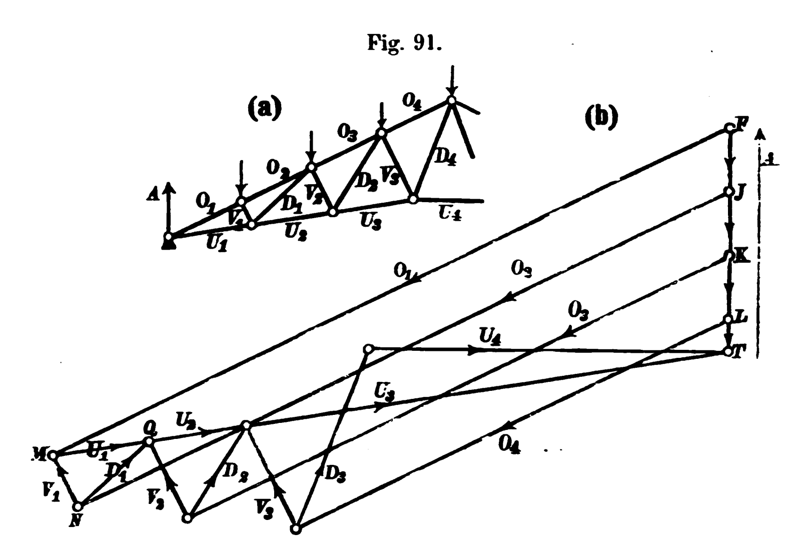
$$K = \frac{11{,}28 \cdot 700}{1 + \frac{72{,}4}{10\,000}} = 5170 .$$

Diese zulässige Druckbelastung ist, gegenüber der wirklichen Belastung mit 1930^{kg}, reichlich gross; man wird aber wegen der Nietverbindungen einen kleineren Querschnitt nicht wählen.

Häufig wird man für O_3 ebenfalls etwas grössere Abmessungen wählen, als oben berechnet wurde, nämlich immer dann, wenn die Länge des Obergurts vom Auflager bis zum First die übliche Länge der Walzeisenstäbe nicht überschreitet. Der kleine Mehraufwand an Eisen wird dann reichlich ausgeglichen durch die Ersparnis an Stossverbindungen. In diesem Fall ist die grösste Obergurtspannung massgebend für die Abmessungen seines Querschnitts und diese findet sich in O_1.

Zur Bestimmung von O_1 und U_1 sind drei Wege möglich: Entweder legt man einen Schnitt um Knotenpunkt A, wie in Fig. 92, und kann dann O_1 und U_1 zeichnerisch wie in Fig. 91 b, oder zweitens durch Anschreiben der zwei Projektionsgleichungen für lothrechte und wagerechte Kräfte ermitteln; drittens

Fig. 91.



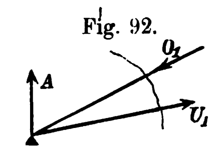
aber lässt sich auch hier das Ritter'sche Momentenverfahren anwenden: Um U_1 zu finden, lege man den Schnitt durch U_1, V_1 und O_2 (Fig. 93) und hat dann für den Momentenpunkt E (Fig. 88) $U_1 \cdot EF \cos\gamma = A \cdot 2$, also $U_1 = \frac{7\,P}{0{,}688 \cdot 0{,}9558} = 10{,}65\,P = 15\,340$ kg. Um O_1 zu finden, lege man den Schnitt durch O_1, V_1, D_1 und U_2 und den Momentenpunkt in den Schnitt der drei Stäbe V_1, D_1 und U_2 (Fig. 91), so dass alle drei das Moment Null liefern. Dann ist, nach Fig. 88, $O_1 \cdot EF = A\,(2 + EF \sin\alpha) = 3{,}5\,P \cdot 2{,}307$, somit $O_1 = \frac{8{,}06\,P}{0{,}688} = 11{,}73\,P = 16\,890$ kg.

Bei der obigen Berechnung der Spannkräfte war die Ermittelung der Stablängen und Hebelarme die zeitraubendste Arbeit. In den meisten Fällen wird man diese Längen aus einer genauen Zeichnung des Trägernetzes abgreifen und dadurch viel Zeit ersparen können. Es ist nicht zu empfehlen, bei derartigen Rechnungen eine weitgehende ziffermässige Genauigkeit anzustreben. Denn bei der schliesslichen Bestimmung der Stabquerschnitte richtet man sich nach den vorhandenen Eisensorten und muss daher meist doch aufrunden. Auch kommen bei der Ausführung ebenso leicht kleine Fehler vor, wie beim Abgreifen von einer Zeichnung. Endlich aber ist die ganze Berechnung unter Annahme eines Gleichgewichtszustandes doch nur eine Annäherung, mit der man die wirklichen Spannungen keineswegs genau ermitteln kann. Hätte man in den obigen

Zahlenrechnungen die Hebelarme auf Decimeter abgerundet, so würden sich die Spannkräfte $U_3 = 10\,800$ kg; $O_3 = -13\,168$ kg; $D_2 = 2469$ kg; $V_2 = -1920$ kg ergeben haben; die Eisenstärken würden eine Änderung nicht zu erfahren brauchen.

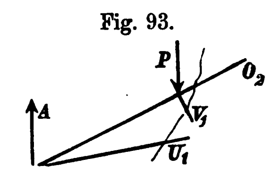
Am schnellsten ergeben sich die Spannkräfte solcher einfach geformten Dachträger mittels eines rein zeichnerisch hergestellten Kräfteplanes (Fig. 91b). Bezeichnet man, wie auf S. 81 die Knotenlast mit P, so ist der Auflagerdruck $A = 3{,}5\,P$. Diese $3^1/_2$ Lasten P sind durch $TF = A$ dargestellt, mit den Theilen $FJ = JK = KL = P$ und $LT = {}^1/_2\,P$. Man muss nun mit den Schnitten im ersten Fache am Auflager A beginnen, indem man (Fig. 92) O_1 und U_1 durchschneidet, dann müssen A, O_1 und U_1 im Gleichgewichte sein, also ein geschlossenes Krafteck bilden. Zieht man durch T (Fig. 91b) eine Parallele zum Untergurtstab U_1, durch F eine Parallele zum Obergurtstab O_1, so schneiden sich beide in M; TFM ist das geschlossene Krafteck, mithin ist FM die Grösse von O_1, MT die Grösse von U_1, beide nach dem Mafsstabe gemessen, in welchem $P = FJ$ ist. In dem Krafteck TFM müssen die Kräfte übereinstimmenden Umfahrungssinn haben. Da nun die Pfeilspitze des Auflagerdrucks A von T nach F weist, so muss O_1 von F nach M, U_1 von M nach T weisen. Diesem entsprechend sind die Pfeile bei O_1 und U_1 angebracht. Überträgt man diese Pfeilrichtungen nun nach Fig. 92 an die Schnittstellen, so erkennt man, dass O_1 eine Druck-, U_1 eine Zugkraft ist.

Fig. 92.



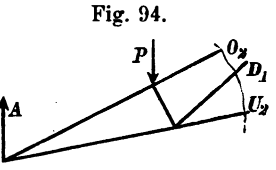
Nachdem so die Spannkräfte des ersten Faches bestimmt sind, führt man einen weiteren Schnitt, doch so, dass nur zwei neue unbekannte Spannkräfte auftreten. Man legt daher den Schnitt durch den soeben behandelten Stab U_1 und ausserdem durch V_1 und O_2 (Fig. 93). Dann müssen die neuen unbekannten Kräfte V_1 und O_2 den bekannten: U_1, A, P, das Gleichgewicht halten, also mit ihnen wieder ein geschlossenes Krafteck bilden. Wir betrachten M (Fig. 91b) als Anfangspunkt mit $MT = U_1$, $TF = A$, $FJ = P$, ziehen von J aus eine Parallele zu O_2, von M aus eine Parallele zu V_1, welche beiden sich in N schneiden. Dann ist $JN = O_2$, $NM = V_1$. Der Umfahrungssinn ist: $MTFJNM$. Überträgt man die so bestimmten Pfeilrichtungen von O_2 und V_1 an die Schnittstellen in Fig. 93, so erkennt man beide als Druckkräfte.

Fig. 93.



Den nächsten Schnitt führt man nun zweckmässig durch O_2 und ausserdem durch D_1 und U_2 (Fig. 94). Die bekannten Theile des jetzt zu benutzenden Kraftecks sind $A = TF$, $P = FJ$, $O_2 = JN$. Zwischen die Punkte N und T sind nun die neuen Kräfte D_1 und U_2 einzulegen. Eine von T aus gezogene Parallele zu U_2 fällt mit TM

Fig. 94.



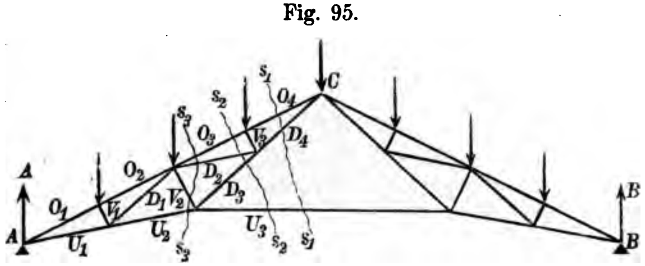
zusammen, $NQ \parallel D_1$ bestimmt daher den Punkt Q, und es ist $NQ = D_1$, $QT = U_2$; beide erkennt man als Zugkräfte.

Die der Reihe nach zu führenden Schnitte sind im Zickzack derartig anzuordnen, dass jeder neue Schnitt ein vorher schon untersuchtes Gurtstück nochmals trifft und ausserdem zwei neue Stäbe. Hiernach setzt sich der leicht verständliche Kräfteplan (Fig. 91 b) fort. Zu beachten ist nur, dass U_1, U_2 und U_3 theilweise auf einander fallen, d. h. verschiedene Anfangspunkte, aber den gemeinsamen Endpunkt T haben. Die Druckkräfte sind im Kräfteplane durch Doppellinien hervorgehoben.

Weiteres über Kräftepläne für Fachwerk findet sich in Keck, Vorträge über Graphische Statik, S. 65 u. ff.

Beispiel 2: Berechnung der Spannkräfte eines Wiegmann-schen Dachträgers*) von 16 m Spannweite (Fig. 95). Die Berechnung der Spannkräfte O_1, U_1, V_1, O_2, D_1 und U_2 erfolgt ganz in derselben Weise wie

Fig. 95.



beim belgischen Dachträger, und wenn, wie wir annehmen wollen, die Neigungen von O_1, O_3, U_1 und U_2 dieselben sind wie bei jenem (Fig. 87), so werden bei gleichen Lasten P auch die Spannkräfte für die genannten Stäbe dieselben sein. Für die Berechnung der Stäbe V_2, O_3, D_2, D_3 und V_3 gelingt es aber nicht, von oben bis unten einen Schnitt so zu führen, dass derselbe nur drei Stäbe zerschneidet; vielmehr ist die Zahl der vom Schnitte getroffenen Stäbe eine grössere. Gleichwohl sind die Spannkräfte auch dieses Trägers in leichter Weise zu finden; nur muss der Vorgang etwas abgeändert werden.

Man legt zunächst einen Schnitt $s_1 s_1$ durch O_4, D_4 und U_3 und wählt den Schnittpunkt C der beiden ersteren zum Drehpunkte. Der Hebelarm von U_3 lässt sich leicht abgreifen oder berechnen und beträgt (auf Grund der Bemerkung S. 85 nach Decimetern abgerundet) 3,2 m. Dann gilt: $0 = -U_3 \cdot 3{,}2 + 3{,}5\, P \cdot 8 - P \cdot 2 - P \cdot 4 - P \cdot 6$, also $U_3 = 5P$.

*) Dieser Dachträger wird in vielen, aber nur deutschen Lehrbüchern als „Polonceauträger" bezeichnet, obgleich ihn der Deutsche Wiegmann 1836 erfunden und seine Berechnung 1837 gezeigt hat. Polonceau hat, allerdings ohne Kenntnis hiervon, den einfachsten Fall des Wiegmannträgers, also ohne die Wandglieder V_1, D_1, D_2 und V_3 der Fig. 95 und ohne Berechnung, zuerst gebaut 1839. Die Anordnung (Fig. 95) wird in mancher deutschen Lehrbüchern als „doppelter Polonceau" bezeichnet.

O_4 und D_4 findet man in gleicher Weise, indem man den Schnittpunkt von D_4 und U_3 bezw. von O_4 und U_3 zum Drehpunkte wählt.

Nun führt man einen Schnitt $s_2 s_2$ durch O_3, D_2, D_3 und U_3. Weil U_3 schon berechnet ist, treten an diesem Schnitte nun drei unbekannte Spannkräfte auf. Um beispielsweise D_2 zu berechnen, benutzt man den Schnittpunkt C von O_3 und D_3 als Drehpunkt und behandelt die schon bekannte Spannkraft U_3 in der Momentengleichung wie eine gegebene Kraft. Der Hebelarm von D_2 wird 1,3, und es gilt:

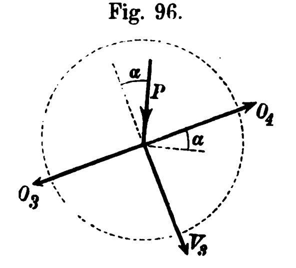
$$0 = -D_2 \cdot 1{,}3 - U_3 \cdot 3{,}2 + 3{,}5\, P \cdot 8 - P \cdot 4 - P \cdot 6, \quad \text{somit}$$
$$D_2 = 1{,}54\, P.$$

Für die Berechnung von O_3 dient der Schnittpunkt von D_2 und D_3 als Drehpunkt; ebenso für D_3 der Schnittpunkt von D_2 und O_3.

An dem Schnitte $s_3 s_3$ kommen die Spannkräfte O_3, D_2, V_2 und U_2 vor, von denen jetzt nur noch V_2 unbekannt ist; wählt man A zum Drehpunkte, so verschwinden O_3 und U_3 aus der Momentengleichung, und die schon bekannte Spannkraft D_2 wird wie eine gegebene Kraft behandelt.

Ein schräger Schnitt durch O_3, V_3, D_4 und U_3 und die Wahl des Punktes C zum Drehpunkte würde nun auch die einzige noch fehlende Spannkraft V_3 ergeben; jedoch erkennt man im Voraus, dass V_3, ebenso wie V_1, gleich $-P\cos\alpha$ sein muss. Führt man nämlich um den oberen Endpunkt von V_3 einen kreisförmigen Schnitt, so trennt man dadurch das in Fig. 96 besonders gezeichnete Stück aus dem Träger heraus. Dieses muss unter Einwirkung der Kräfte P, O_3, O_4 und V_3 im Gleichgewichte sein. Zerlegt man aber P nach der Richtung von V_3 und rechtwinklig dazu in $P\cos\alpha$ bezw. $P\sin\alpha$, so muss in ersterer Richtung stattfinden:

Fig. 96.



$$P\cos\alpha + V_3 = 0 \quad \text{oder}$$
$$V_3 = -P\cos\alpha.$$

(Für V_1 gilt dieselbe Figur.) Nach diesen Angaben kann es dem Leser keine Schwierigkeiten machen, die sämmtlichen Spannkräfte der linken Hälfte des Wiegmannschen Dachträgers zahlenmässig auszurechnen. — Dem Anfänger ist dringend zu rathen, nach Führung eines Schnittes das links davon befindliche Trägerstück jedes Mal mit den daran auftretenden Kräften besonders aufzuzeichnen, weil dadurch die sichere Aufstellung der Momentengleichung sehr erleichtert wird.

c) Ungünstigste Belastungsart.

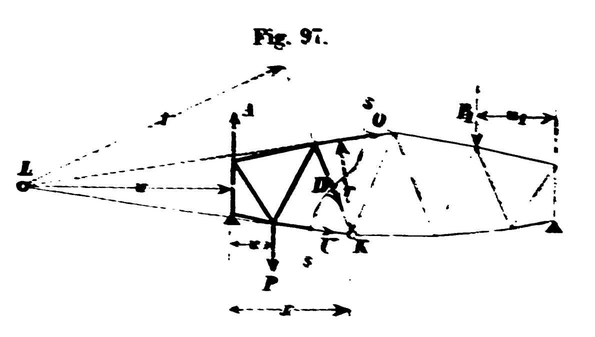
In den vorstehend berechneten Beispielen wurde nur eine bestimmte Belastungsart vorausgesetzt; es wurde angenommen, dass jeder Belastungspunkt eine Last P trage, die aus der stärksten überhaupt vorkommenden Belastung der Dachfläche abgeleitet ist.

Diese Voraussetzung trifft für die zwei eben behandelten Dachträger zu, wie S. 89/91 sich erweisen wird. Für anders gestaltete Fachwerke trifft sie aber nicht allgemein zu, vielmehr wird sich zeigen, dass in manchen Stäben des Fachwerks die Entlastung gewisser Knotenpunkte eine Vergrösserung der Spannkräfte herbeiführen kann.

Es muss deshalb unterschieden werden zwischen der ständigen Belastung, die von dem Eigengewichte des Bauwerks und aller damit fest verbundenen Theile herrührt, und der beweglichen Belastung, die bei Dachträgern aus dem Gewichte einer Schneelage und dem Drucke des Windes, bei Brückenträgern aus dem Gewichte der die Brückenbahn befahrenden Lokomotiven, Wagen u. dergl. oder von dem Gewichte der auf der Brücke Platz findenden Menschen (Menschengedränge) und Thiere besteht. Beide Arten von Belastungen sollen annäherungsweise als gleichförmig vertheilt angesehen werden; die ständige Last werde mit g, die bewegliche Last mit p für die Längeneinheit des Trägers bezeichnet, so dass, wenn der wagerechte Abstand der Lastpunkte $= \lambda$ ist, die ständige Knotenlast $G = g\lambda$, die bewegliche Knotenlast $P = p\lambda$ wird. Die Lasten G sind stets vorhanden, die Lasten P können auch fehlen. Jede Knotenlast kann daher entweder nur aus G, oder aus $G + P$ bestehen.

Um nun bei einem Fachwerkträger auf zwei Endstützen die Einwirkung beweglicher Lasten auf die an irgend einem Schnitt ss auftretenden Spannkräfte zu erkennen, denken wir uns irgend einen Knotenpunkt links bezw. rechts vom Schnitte mit einer beliebigen Last P bezw. P_1 versehen (Fig. 97). Diese beiden Lasten treten in den Momentengleichungen, die man etwa für das links

Fig. 97.



vom Schnitte liegende Trägerstück aufstellt, in verschiedener Weise auf: beide liefern einen Beitrag zu dem Auflagerdruck A und haben hierdurch mittelbar Einfluss auf die Spannkräfte des Schnittes:

die linkseitige Last P gehört aber zu den am betrachteten Trägerstücke wirkenden Kräften und erscheint als solche auch noch unmittelbar in der Momentengleichung, während dies für P_1 nicht zutrifft. Aus diesem Grunde müssen Lasten links und rechts vom Schnitte scharf auseinander gehalten werden. Die beliebigen Knotenlasten P und P_1 zu beiden Seiten des Schnittes seien um u und u_1 vom linken bezw. rechten Auflager entfernt. Dann ist der linkseitige Auflagerdruck

$$1) \qquad A = P\frac{l-u}{l} + P_1\frac{u_1}{l} = P - P\frac{u}{l} + \frac{P_1 u_1}{l}.$$

Zur Berechnung der Spannkraft O im Obergurt dient der Punkt K des Untergurtes im Abstand x von der linkseitigen Auflager-Lothrechten als Drehpunkt, und es gilt die Momentengleichung

$$0 = Or + Ax - P(x-u) \quad \text{oder nach Gl. 1:}$$

$$-Or = Px - P\frac{u}{l}x + P_1\frac{u_1}{l}x - Px + Pu,$$

woraus sich

$$-Or = Pu\left(1-\frac{x}{l}\right) + P_1 u_1 \frac{x}{l}$$

ergiebt. Da nun $x \leqq l$ ist, so haben die beiden Glieder der rechten Seite übereinstimmende Vorzeichen. Zu der Druckkraft $-O$ in irgend einem Theile des Obergurtes tragen also Lasten links und rechts vom Schnitt in übereinstimmender Weise bei. Gleiches findet man leicht bezüglich der Zugkraft U im Untergurte. Man hat daher den Satz:

Die Druckkräfte im Obergurt und die Zugkräfte im Untergurt werden am grössten, wenn alle Lastpunkte möglichst stark belastet sind.

Für die Strebe D liegt der Drehpunkt L im Schnittpunkte der Richtungen der vom Schnitte mitgetroffenen Gurtstücke. Die Momentengleichung lautet:

$$0 = Dt - Aw + P(w+u), \quad \text{mithin}$$

$$Dt = Pw - \frac{Pu}{l}w + \frac{P_1 u_1}{l}w - Pw - Pu$$

$$= -Pu\left(1+\frac{w}{l}\right) + P_1 u_1 \frac{w}{l}.$$

Hiernach liefern die Lasten P und P_1 zu D Beiträge von entgegengesetztem Vorzeichen. Eine Last rechts vom Schnitt erzeugt in der Strebe Zugkraft und umgekehrt. Belastungen links und rechts vom Schnitte vermindern sich also gegenseitig in ihrer Wirkung. Soll nun die Zugkraft in den Streben so gross wie möglich werden, so muss man die Lasten von positivem Einflusse, d. h. die rechtseitigen, möglichst gross machen, und umgekehrt. Rechts vom Schnitte wird man daher die Lastpunkte durchweg mit ständiger und beweglicher $G+P$, links vom Schnitte nur mit ständiger Last G versehen. — Die Druckkraft in den Streben wird am grössten bei entgegengesetzter Belastung, d. h. wenn links vom Schnitte volle Lasten $G+P$, rechts nur ständige Lasten G wirken. Solche Anordnung der Lasten nennen wir einseitige Belastungen. Dies gilt für eine von links nach rechts fallende Strebe; für eine nach rechts ansteigende Strebe ist alles entgegengesetzt, weil das Moment einer solchen Strebe entgegengesetzten Drehsinn zeigt.

Liegt der Schnitt näher an dem rechtseitigen Auflager, so kann der Drehpunkt L rechts von der Spannweite liegen. Dies ändert aber, wie man leicht findet, nichts an den vorstehenden Ergebnissen; diese bleiben gültig, so lange der Drehpunkt ausserhalb der Spannweite AB liegt.

Anders verhält sich die Sache, wenn der Drehpunkt L für eine Strebe innerhalb der Spannweite liegt (Fig. 98). Dann ist

$$0 = -Dt + Aw + P(u-w),$$

oder mit Benutzung von Gl. 1:

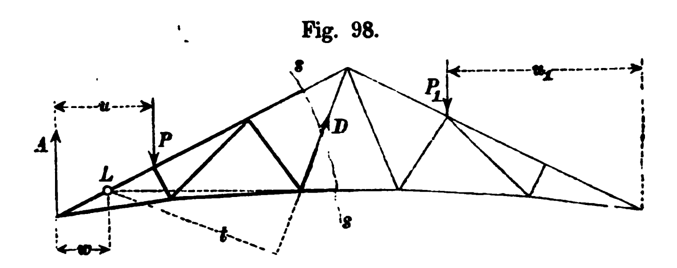
$$Dt = Pw - \frac{Pu}{l}w + \frac{P_1 u_1}{l}w + Pu - Pw$$

$$= Pu\left(1 - \frac{w}{l}\right) + P_1 u_1 \frac{w}{l}.$$

Weil bei der jetzt angenommenen Lage von L die Länge w stets $\leqq l$ ist, so werden in der letzten Gleichung beide Glieder der rechten Seite positiv, so dass nun, wie bei den Gurtstäben, Lasten links und rechts vom Schnitte Wirkungen von übereinstimmendem Vorzeichen hervorbringen. Ob eine bestimmte Last in einer bestimmten Strebe gerade Zug oder Druck erzeugt, ist zunächst von geringerer Wichtigkeit, als die Entscheidung der Frage, ob ein

Stab auf *volle* oder auf *einseitige* Belastung berechnet werden muss. Im letzteren Falle sind dann in der Regel zwei Belastungsfälle zu untersuchen: in dem einen befindet sich bewegliche

Fig. 98.



Belastung nur auf der linken Seite, im anderen nur auf der rechten Seite. Für Ständer, die nur besondere Fälle von Streben sind, gelten dieselben Gesetze.

Bei den meisten Fachwerkformen liegt der für die Wandglieder (Streben und Ständer) massgebende Drehpunkt *ausserhalb* der Spannweite; der andere Fall kommt seltener vor.

Daher hat man den Satz:

Die Spannkräfte der Wandglieder eines einfachen Fachwerkträgers auf zwei Endstützen sind, wenn der massgebende Drehpunkt **ausserhalb** *der Spannweite liegt, auf einseitige Belastung (das eine Mal rechts, das andere Mal links vom Schnitte) zu berechnen; wenn aber der Drehpunkt* **zwischen** *die Auflager-Lothrechten fällt, so muss die Berechnung (wie bei den Gurten) für volle Belastung erfolgen.*

Fällt der Drehpunkt in die linkseitige Auflager-Lothrechte, so ist dies ein Grenzfall, der nach Belieben zu der einen oder anderen Gruppe von Fällen gerechnet werden kann. Man würde hiernach die betreffende Strebe auf einseitige oder auch auf volle Belastung berechnen dürfen. Beide Berechnungen führen nämlich zu dem gleichen Ergebnisse. Irgend eine Last P_1 rechts vom Schnitt wirkt auf den linkseitigen Abschnitt nur mittelbar durch seinen Beitrag zu dem Auflagerdruck A ein (s. S. 88). Da aber der Auflagerdruck A in Bezug auf den in seiner Richtungs-

Fig. 99.

linie liegenden Drehpunkt das Moment Null hat, so haben rechtseitige Lasten auf die betreffende Strebe D überhaupt keinen Einfluss (Fig. 99); eine einseitige Belastung links vom Schnitte hat deshalb dieselbe Wirkung, wie eine volle Belastung; und da die Rechnung mit voller Belastung bequemer ist, so kann man diese, die für die Gurtkräfte massgebend war, auch für Ständer und Streben verwenden. Die für volle Belastung durchgeführte Berechnung des in Fig. 87, S. 80 und Fig. 95, S. 86 dargestellten Dachträgers war daher richtig. Für die Streben des Mittelfaches aber musste volle Belastung angenommen werden, weil für diese der Drehpunkt zwischen den Auflager-Lothrechten liegt. — Über schiefe Belastungen durch Winddruck s. Keck, Graphische Statik, S. 70.

d) Parabolischer Fachwerkträger.

Beispiel: Parabolischer Fachwerkträger von $l = 24^{m}$ Spannweite und $h_m = 3^{m}$ Höhe in der Mitte. Der Obergurt sei gerade, der Untergurt einer Parabel eingeschrieben. Die Spannweite sei durch Ständer in sechs gleiche Fache von der Länge $\lambda = 4^{m}$ getheilt (Fig. 100). Für die Ständerhöhen h gilt dann die Parabelgleichung (s. 1. Theil, 2. Aufl., S. 185, Gl. 5)

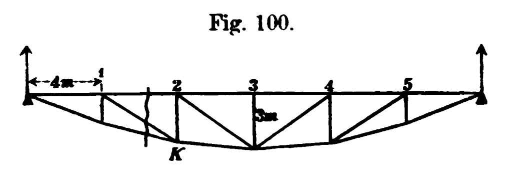
$$h = \frac{4\,h_m}{l^2}\,x\,(l - x)\,,$$

wenn x der Abstand eines Ständers von einem Auflager.

Für $x = 4 \quad 8 \quad 12$

wird $h = 1^2/_3 \quad 2^2/_3 \quad 3\,.$

Fig. 100.



Für jeden der fünf Lastpunkte des Obergurts sei die ständige Last $G = 2000^{kg} = 2^{t}$, die bewegliche $P = 10000^{kg} = 10^{t}$. Es sollen beispielsweise die Spannkräfte des zweiten Faches berechnet werden (Fig. 101). Für die Gurtkräfte ist volle Belastung aller Lastpunkte mit $2 + 10 = 12^{t}$ anzunehmen; dann wird der Auflagerdruck $A = {}^5/_2 \cdot 12 = 30^{t}$. Für den Obergurt O_2 ist K der Drehpunkt und $h_2 = 2^2/_3{}^{m}$ der Hebelarm; die Momentengleichung ergiebt daher

Fig. 101.

$$0 = O_2 \cdot {}^8/_3 + A \cdot 8 - 12 \cdot 4\,, \quad \text{woraus}$$

$$O_2 = -72^{t}\,.$$

Das Neigungsverhältnis des zweiten Stückes U_2 des Untergurts gegen die Wagerechte (Fig. 102) ist

$$(h_2 - h_1) : 4 = {}^1/_4 = \text{tg}\, \nu,$$

$$\text{dann ist} \quad \cos \nu = 0{,}9701, \quad \sec \nu = 1{,}031.$$

Der Drehpunkt für U_2 ist K', der Hebelarm daher $h_1 \cos \nu$; die Momentengleichung lautet:

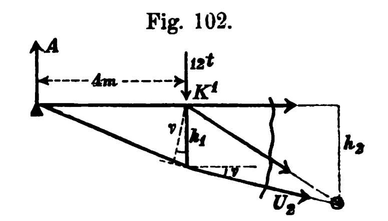


Fig. 102.

$$0 = -U_2 \cdot {}^5/_3 \cos \nu + A \cdot 4, \quad \text{also}$$

$$U_2 = 72 : \cos \nu = 72 \cdot \sec \nu = 74{,}23\,^t.$$

Für die Strebe D_1 liegt der Drehpunkt L links von der Spannweite (Fig. 103), u. zw., weil die Neigung von U_2, d. h. $\text{tg}\, \nu = {}^1/_4$, um $4\, h_1 = 6^2/_3 = L K'$ links von K', oder um $2^2/_3\,^m$ links von A. Ist δ der Neigungswinkel von D_1, so gilt dafür $\text{tg}\, \delta = h_2 : 4 = {}^2/_3$ und $\sin \delta = 0{,}5546$. Der Hebelarm von D_1 wird

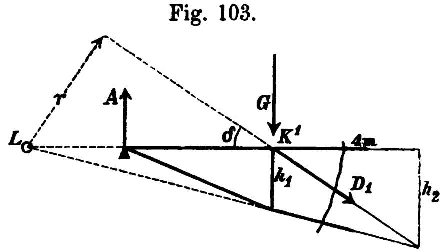


Fig. 103.

$$r = LK \cdot \sin \delta = 3{,}697\,^m.$$

Die Strebe ist auf zwei verschiedene Belastungsarten zu berechnen: Bei einseitiger Belastung rechts vom Schnitte tragen sämmtliche Lastpunkte die ständige Last $G = 2^t$, während nur die Punkte 2 bis 5 (Fig. 100) mit beweglicher Last $P = 10^t$ bedeckt sind. Erstere liefern zu A den Beitrag ${}^5/_2 \cdot 2 = 5^t$, letztere den Beitrag

$$({}^1/_6 + {}^2/_6 + {}^3/_6 + {}^4/_6)\, 10 = 16^2/_3\,^t, \quad \text{so dass}$$

$$A = 5 + 16^2/_3 = 21^2/_3\,^t$$

wird. Die Momentengleichung für L ergiebt

$$0 = D_1 \cdot 3{,}697 - A \cdot 2^2/_3 + G \cdot 6^2/_3, \quad \text{woraus}$$

$$D_1 = 12{,}02\,^t.$$

Bei einseitiger Belastung links vom Schnitt wird

$$A' = 5 + 10 \cdot {}^5/_6 = 13^1/_3\,^t; \quad \text{daher Momentengleichung:}$$

$$0 = D_1' \cdot 3{,}697 - A' \cdot 2^2/_3 + (G + P) \cdot 6^2/_3, \quad \text{woraus}$$

$$D_1' = -12{,}02\,^t.$$

Die Strebe D_1 erfährt also, wenn die Lastengruppe P sich über den Träger bewegt, Spannkräfte, die zwischen einer Zugkraft von $12{,}02\,^t$ und einer Druckkraft von derselben Grösse schwanken.

Die gleichen Belastungsarten gelten auch für den Ständer V_2 (Fig. 104). Der Drehpunkt L liegt um $x = h_2 \dfrac{4}{1/3} = 32\,^m$ links von V_2, um $24\,^m$ links von A. Daher gilt für rechtseitige Belastung:

$$0 = -V_2\,32 - A \cdot 24 + G \cdot 28 \quad \text{mit} \quad A = 21^2/_3\,{}^t, \quad \text{wie bei } D_1,$$
$$\text{also} \quad V_2 = -14{,}5\,{}^t.$$

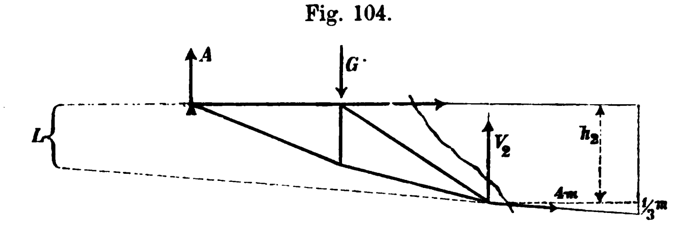
Für linkseitige Belastung:

$$0 = -V_2' \cdot 32 - A' \cdot 24 + (G + P) \cdot 28 \quad \text{mit} \quad A' = 13^1/_3\,{}^t, \quad \text{wie bei } D_1$$
$$\text{also} \quad V_2' = 0{,}5\,{}^t.$$

Die Spannkraft des Ständers schwankt demnach zwischen 0,5 t Zug und 14,5 t Druck.

Dieses Beispiel des parabolischen Trägers ist besonders geeignet, zu zeigen, welchen Fehler man begehen würde, wenn man die Wandglieder nur

Fig. 104.



auf volle Belastung berechnete. Es wäre dann $A = 30\,{}^t$, und es würde nach Fig. 103, wenn man darin die Einzellast G durch $G + P = 12$ ersetzt,

$$0 = D_1 \cdot 3{,}697 - 30 \cdot 2^2/_3 + 12 \cdot 6^2/_3, \quad \text{daher}$$
$$D_1 = 0; \quad \text{und nach Fig. 104}$$
$$0 = -V_2 \cdot 32 - 30 \cdot 24 + 12 \cdot 28, \quad \text{daher}$$
$$V_2 = -12\,{}^t.$$

Für volle Belastung ist also die Strebe D_1 spannungslos, und das Gleiche gilt für sämmtliche Streben des parabolischen Trägers. Im 1. Theil, 2. Aufl., S. 187, wurde schon gezeigt, dass der parabolische Träger ohne Streben für volle Belastung im Gleichgewicht ist, dass daher diese Stäbe nur durch eine ungleichmässige Belastung bedingt werden. Demgemäss werden nun die vorhandenen Streben bei voller Belastung spannungslos; auch haben dann die Ständer nur die Knotenlasten von oben nach den Knotenpunkten des geknickten Untergurtes zu übertragen; daraus erklärt sich der obige Werth $V_2 = -12\,{}^t$ für volle Belastung, den man in gleicher Weise für sämmtliche Ständer findet. Nach 1. Theil, 2. Aufl., S. 186, ist $H = \frac{p\,l^2}{8f} = \frac{p\,l \cdot l}{8f}$ die wagerechte Spannkraft einer solchen Stangenverbindung; dies giebt hier, wo auf 4 m Länge 12 t, auf $l = 24\,{}^m$ also 72 t kommen:

$$H = \frac{72 \cdot 24}{8 \cdot 3} = 72\,{}^t.$$

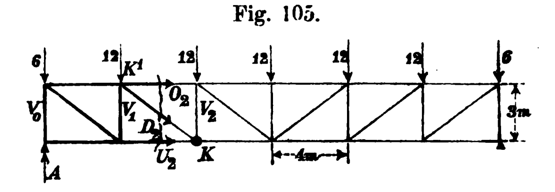
Dieser Werth gilt für die Druckkräfte in sämmtlichen Stäben des Obergurtes und ist zugleich die wagerechte Seitenkraft der Zugkräfte im Untergurte.

e) Parallel-Fachwerkträger.

Beispiel: Träger mit parallelen Gurten von $l = 24^m$ Spannweite und $h = 3^m$ Trägerhöhe (Fig. 105). Die Spannweite sei wiederum durch Ständer in 6 Fache von $\lambda = 4^m$ Länge getheilt; auch mögen die Lasten $G = 2^t$, $P = 10^t$, dieselben sein, wie im vorigen Beispiele, und nur am Obergurt angreifen.

Für die Berechnung der Gurten ist volle Belastung sämmtlicher Lastpunkte anzunehmen, und zwar sind die Endpunkte des Obergurtes je mit der halben Last eines Faches, d. h. mit 1^t bezw. 5^t zu belasten. Dann ist $A = 3 \cdot 12 = 36^t$.

Fig. 105.



Für O_2 ist K der Drehpunkt, und man findet aus der Momentengleichung

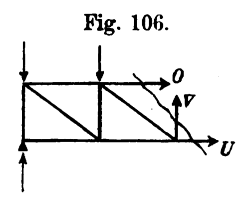
$$0 = O_2 \cdot 3 + (A - 6) \cdot 8 - 12 \cdot 4:$$
$$O_2 = -64^t.$$

Für U_2 ist K' der Drehpunkt, und man findet aus:

$$0 = -U_2 \cdot 3 + (A - 6) 4$$
$$U_2 = 40^t.$$

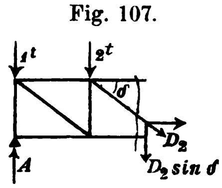
Übrigens braucht man bei einem derartigen Parallelfachwerke mit Streben, die nach der Mitte hin abfallen, nur die Spannkräfte des Obergurtes zu berechnen und kann darnach diejenigen des Untergurtes ohne Weiteres angeben. Führt man nämlich durch den Träger einen Schnitt in der Richtung der Streben (Fig. 106), so muss nach der Gleichung der wagerechten Kräfte $O + U = 0$, mithin $U = -O$ sein, d. h. in einem Parallel-Fachwerke mit Ständern haben zwei Stäbe des Ober- und Untergurtes, welche zwischen zwei Nachbarstreben liegen, gleiche aber entgegengesetzte Spannkraft; mithin ist $O_1 = -U_2$; $O_2 = -U_3$ u. s. f.

Fig. 106.



Da der Schnittpunkt der Gurten in unendlicher Ferne liegt, so verwendet man für die Berechnung der Wandglieder eines Parallelträgers an Stelle der Momentengleichung zweckmässig die Gleichung der lothrechten Kräfte. In dieser kommen die Gurtkräfte, weil sie wagerecht sind, nicht vor; mithin erreicht man dasselbe, was sonst mit der Momentengleichung erzielt wurde, nämlich dass man für die gesuchte Spannkraft nur eine einzige Gleichung aufzustellen braucht.

Fig. 107.



Ordnet man zur Berechnung von D_2 zunächst eine Belastung rechts vom Schnitt an, so wird der linke Auflagerdruck leicht

zu $22^2/_3$ t gefunden (nämlich um die ständige Last (1 t) des Endknotenpunktes mehr als auf S. 93 zur Berechnung von D_1). Ist δ der Neigungswinkel der Strebe gegen die Wagerechte, so ist $D_2 \sin \delta$ die lothrechte Seitenkraft von D_2, und man erhält (Fig. 107) aus

$$0 = D_2 \sin \delta - A + 1 + 2:$$

$$D_2 \sin \delta = 19^2/_3 \text{ t} \quad \text{und,}$$

weil $\operatorname{tg} \delta = {}^3/_4$, $\sin \delta = 0{,}6$,

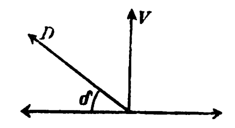
$$D_2 = 32{,}78 \text{ t}.$$

Für einseitige Belastung links vom Schnitt ist $A' = 19^1/_3$ t; und aus $0 = D_2' \sin \delta - A' + 6 + 12$ findet man leicht

$$D_2' \sin \delta = 1^1/_3 \text{ t}; \quad D_2' = 2{,}22 \text{ t}.$$

Die Spannkraft der Strebe D_2 schwankt also zwischen den Zugkräften 2,22 und 32,78 t; Druckkraft erfährt sie nicht, ebensowenig D_1, wohl aber D_3; letzteres giebt Anlass zu sogen. Gegenstreben, worauf hier nicht weiter eingegangen werden soll.

Fig. 108.



Die Spannkräfte der Ständer lassen sich beim Parallelfachwerk auf die der Streben zurückführen. Führt man nämlich um einen Knoten des unbelasteten Gurtes (hier also des unteren) einen kreisförmigen Schnitt (Fig. 108) und wendet auf den herausgeschnittenen Theil die Gleichung der lothrechten Kräfte an, so kommen in dieser nur V und D vor, und es muss

$$V + D \sin \delta = 0 \quad \text{oder} \quad V = -D \sin \delta \text{ sein.}$$

Am Knotenpunkte K des Untergurtes (Fig. 105) treffen D_2 und V_2 zusammen, mithin wird $V_2 = -D_2 \sin \delta = -19^2/_3$ t; $V_2' = -1^1/_3$ t. Der Ständer V_2 erfährt also eine Druckkraft, die zwischen $1^1/_3$ und $19^2/_3$ t schwankt.

Greifen die Lasten am Untergurt an, so ändern sich die Spannungen in den Streben und in den Ständern.

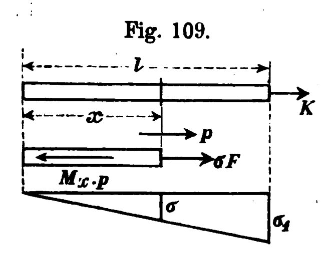
Eine eingehendere Behandlung erfahren die Fachwerke in Keck, Vorträge über Elasticitätslehre und über Graphische Statik.

B. Elastisch-feste Körper in Beschleunigungs-Zuständen.

1. Beschleunigte Verschiebung elastisch-fester Körper.

Einem geraden Stabe werde durch eine im Schwerpunkte der vorderen Stirnfläche angreifende Zugkraft K eine Beschleunigung p ertheilt (Fig. 109). Hierdurch entstehen Spannungen und Formänderungen (elastische Verlängerungen). Es wird die Annahme gemacht, die Formänderungen seien bereits derartig eingetreten, dass gegenseitige Bewegungen der einzelnen Punkte des Stabes nicht mehr erfolgen, dass vielmehr alle Theile übereinstimmende Geschwindigkeit und Beschleunigung haben. Dann müssen an dem ganzen Stabe, sowie an jedem abgeschnittenen Theile desselben nach S. 3 die Ergänzungskräfte $[-mp]$ den wirklichen Kräften das Gleichgewicht halten, und es muss der Stab sich bei der Bewegung wie ein starrer Körper verhalten.

Fig. 109.



Nach dem Satze von der Beschleunigung des Schwerpunktes (1. Theil, 2. Aufl., S. 143) ist

$$p = \frac{K}{M}, \quad \text{wobei } M = \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot l$$

die Masse des ganzen Stabes bedeutet (s. 1. Theil, 2. Aufl., S. 127); l ist die Länge, F die Querschnittfläche, γ das Gewicht der Raumeinheit des Stabes, g die Erdbeschleunigung.

Macht man auch hier die Voraussetzung, dass die an einem Querschnitt auftretende Spannkraft sich gleichmässig über dessen Fläche F vertheile, so ist die Spannung an der Angriffsstelle der Kraft K

1) $$\sigma_1 = \frac{K}{F} = \frac{M}{F} p = \frac{\gamma}{g} l p = \gamma l \frac{p}{g},$$

Will man σ_1 in Atmosphären ($^{kg}/_{qcm}$) erhalten, so drücke man l in ^{cm} aus, und es ist dann γ das Gewicht eines Kubikcentimeters in ^{kg}.

Ist σ die Spannung eines Querschnittes im Abstand x vom freien Ende, M_x die Masse des Abschnittes von der Länge x, so muss $\sigma F = M_x p = \frac{\gamma}{g} F x p$ sein, mithin

2) $$\sigma = \gamma \frac{p}{g} \cdot x .$$

Diese mit x verhältnisgleich sich ändernde Spannung ist in Fig. 109 dargestellt. Hierbei ist die Einwirkung der Schwere nicht berücksichtigt, vielmehr angenommen, dass die Verschiebung etwa auf einer wagerechten, glatten Unterlage erfolge.

Fig. 110.

Es möge nun die in lothrechter Richtung befindliche Stange der Schwere unterliegen und durch eine oben angreifende Zugkraft K eine Beschleunigung p lothrecht aufwärts erfahren (Fig. 110). Dann ist die gesammte wirkliche Kraft in der Richtung aufwärts $K - Mg = K - \gamma F l$; die gesammte Ergänzungskraft mit dem Sinne abwärts wird $Mp = \frac{\gamma}{g} F l p$, mithin

$$K = M(g + p) = \gamma F l \left(1 + \frac{p}{g}\right)$$

und die Spannung am oberen Ende

3) $$\sigma_1 = \gamma l \left(1 + \frac{p}{g}\right).$$

Nach dem unteren Ende des Stabes vermindert sich die Spannung σ wiederum nach geradlinigem Gesetze bis auf Null.

Ist die Beschleunigung p des Stabes abwärts, K aber wie vorhin aufwärts gerichtet, mithin $p \leqq g$, so kehrt in den vorstehenden Formeln p sein Vorzeichen um, es wird

$$K = \gamma F l \left(1 - \frac{p}{g}\right),$$

$$\sigma_1 = \gamma l \left(1 - \frac{p}{g}\right)$$

und im Abstand x vom unteren Ende

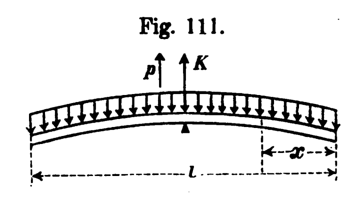
4) $$\sigma = \gamma x \left(1 - \frac{p}{g}\right).$$

Für $p = g$ mit $K = 0$, d. h. für einen frei fallenden Stab, wird $\sigma = 0$, d. h. **ein frei fallender Stab ist spannungslos.**

Dies gilt freilich nur unter der Voraussetzung, dass sich in der Stange keine von der Herstellung durch Giessen, Schmieden, Walzen, Ziehen (Drahtziehen), Drücken u. dergl. herrührende Spannungen vorfinden, die man auch wohl falsche Spannungen nennt, und die selbst dann vorhanden sein können, wenn der Stab äusseren Kräften völlig entzogen ist. In einem mit derartigen Spannungen behafteten Stabe tritt beim freien Falle derselbe Spannungszustand ein, als ob er von äusseren Kräften frei wäre; an jedem Querschnitt ist die gesammte Spannkraft Null, doch können an der Schnittfläche dann gleichwohl innere Zugkräfte und in ihrer Summe ebenso grosse Druckkräfte vorkommen. Solche Herstellungsspannungen lassen sich durch Ausglühen und langsames Abkühlen fast ganz beseitigen. Genauer lautet daher der obige Satz: **Jeder frei (ohne Luftwiderstand) fallende Körper, auch wenn er nicht die Form eines geraden Stabes hat, ist spannungslos, abgesehen von etwaigen Herstellungsspannungen.** Die Herstellungsspannungen sind in der Regel im Innern des Körpers Zug-, in der Nähe der Oberfläche aber Druckspannungen.

Wird einem prismatischen Stabe durch eine in seiner Mitte angreifende, rechtwinklig zur Stabrichtung wirkende Kraft K eine Verschiebungsbeschleunigung p ertheilt (Fig. 111), so entstehen Biegungsspannungen. Unter der Voraussetzung, dass die diesen Spannungen entsprechenden Durchbiegungen bereits eingetreten seien, dass also Formänderungen nicht mehr vorkommen, haben sämmtliche Massentheilchen des Stabes die gleiche Beschleunigung p. Die Ergänzungskräfte $[-mp]$, welche mit K im Gleichgewichte sein müssen, bilden eine gleichmässig über die Länge vertheilte Belastung. Ist F der Querschnitt des Stabes, γ wiederum das Gewicht der Körpereinheit, so kommt auf die Längeneinheit das Gewicht γF, die Masse $\gamma/g\, F$, die Ergänzungskraft $\gamma F p : g$ (dem Sinne der Beschleunigung p entgegengesetzt). An einer Schnittstelle im Abstande x vom freien Ende entsteht dann, wenn wir zunächst den biegenden Einfluss des Eigengewichts des Stabes vernachlässigen, ein Biegungsmoment

Fig. 111.



$$\mathfrak{M} = \gamma F \frac{p}{g} \frac{x^2}{2}.$$

Das grösste Moment findet sich an der Angriffsstelle der Kraft K mit $x = \frac{1}{2} l$ zu

5) $$\mathfrak{M}_{max} = \gamma F \frac{p}{g} \frac{l^2}{8}.$$

Ist die Beschleunigung lothrecht aufwärts gerichtet und wirkt auch die Schwere auf den Stab, so ist, wie auf S. 91 statt $p:g$ nunmehr $1 + \frac{p}{g}$ einzuführen. Ist $\mathfrak{W} = J:e$ das Widerstandsmoment des Stab-Querschnitts, so wird die stärkste Spannung

$$\sigma = \frac{\mathfrak{M}_{max}}{\mathfrak{W}} = \frac{\gamma F l^2}{8\mathfrak{W}}\left(1 + \frac{p}{g}\right).$$

Mit $\gamma F l = P$ (Gewicht des Stabes) wird

$$\sigma = \frac{Pl}{8\mathfrak{W}}\left(1 + \frac{p}{g}\right).$$

Ist der Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r, so wird $\mathfrak{W} = \frac{1}{4} r^3 \pi$ und

6) $$\sigma = \frac{Pl}{2 r^3 \pi}\left(1 + \frac{p}{g}\right) = \frac{\gamma l^2}{2r}\left(1 + \frac{p}{g}\right).$$

Beispiel: Ein nahezu cylindrischer Baum von 12 m Länge und 0,1 m Halbmesser soll mittels eines in seiner Mitte befestigten Seiles auf ein Baugerüst gezogen werden. Das Hinaufziehen erfolge aber nicht gleichmässig, sondern mit einer Beschleunigung $p = \frac{1}{2} g$. Ein Kubikmeter des Holzes wiege 600 kg, dann ergiebt sich, wenn man diese Zahlen in Gl. 6 einführt, die Spannung natürlich in kg/qm, nämlich

$$\sigma = \frac{600 \cdot 12^2}{2 \cdot 0{,}1} \cdot 1{,}5 = 648\,000,$$

oder, da 1 kg/qm = 10 000 at ist (vgl. S. 8),

$$\sigma = 64{,}8 \text{ at}.$$

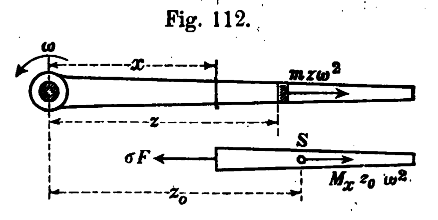
Will man σ unmittelbar in at erhalten, so muss man γ als Gewicht eines Kubikcentimeters $= 600 : 100^3$, $l = 1200$ cm, $r = 10$ cm einführen. Die Formel gilt auch, wenn bei etwaigem Hinablassen eine Verzögerung p, vielleicht durch Bremsung der Windevorrichtung, eintritt. Für gleichmässige Bewegung ($p = 0$) wird die Spannung nur $\frac{2}{3} \cdot 64{,}8 = 43{,}2$ at.

2. Gleichmässige Drehung um eine feste Achse.

Bei gleichmässiger Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω (Fig. 112) erfährt ein Massentheilchen m im Abstande z von der Drehachse die Centripetalbeschleunigung $z\omega^2$ (1. Theil, 2. Aufl.,

S. 88); dem entspricht als Ergänzungskraft die Centrifugalkraft $m z \omega^2$. Führt man im Abstand x von der Drehachse einen Schnitt, bezeichnet die entsprechende Querschnittfläche mit F, die daran auftretende Spannung mit σ, so muss die innere Spannkraft σF den Centrifugalkräften des Stabtheiles zwischen der Schnittstelle und dem freien Ende das Gleichgewicht halten, oder es muss sein

Fig. 112.



1) $$\sigma F = \omega^2 \Sigma m z = \omega^2 M_x z_0,$$

wenn M_x die Masse des abgeschnittenen Stabtheiles, z_0 den Abstand seines Schwerpunkts von der Drehachse bedeutet. Sind Form und Massenvertheilung des Stabes bekannt, so kann man für jede Schnittstelle σ berechnen.

Ein **prismatischer** Stab von der Länge l und dem Querschnitt F, ergiebt hiernach

$$M_x = \gamma F(l - x) : g, \quad z_0 = {}^1/_2 (l + x) \quad \text{und}$$

$$\sigma = \frac{\omega^2 \gamma}{g}(l - x)\frac{(l + x)}{2} = \frac{\omega^2 \gamma}{g}\frac{l^2 - x^2}{2}.$$

Führt man dann die Umfangsgeschwindigkeit $c = l\omega$ des Stabes ein, so wird

2) $$\sigma = \gamma \frac{c^2}{2g}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

worin $\frac{c^2}{2g}$ die der Umfangsgeschwindigkeit entsprechende Geschwindigkeitshöhe bedeutet. Diese Spannung wird am grössten für $x = 0$, d. h. dicht an der Achse, nämlich

3) $$\sigma_{max} = \gamma \frac{c^2}{2g}.$$

Dieselbe Spannung erfährt an der Aufhängestelle ein lothrecht herabhängender prismatischer Stab oder Draht von der Dichte γ, wenn seine Länge $= \frac{c^2}{2g}$ ist.

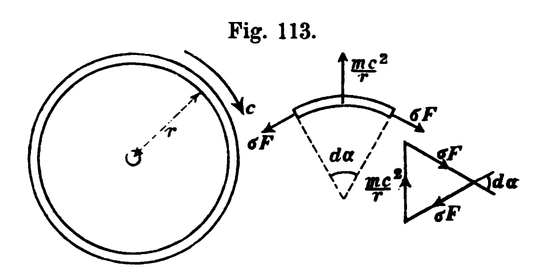
Beispiel: Bei welcher sekundlichen Umfangsgeschwindigkeit erhält ein um seinen Endpunkt sich drehender prismatischer **Schmiedeisenstab** eine Spannung von 700 at? 1 cbm Schmiedeeisen wiegt 7800 kg $= \gamma$. Da hier c in m/sek. verlangt wird, so müssen auch σ, γ und g auf Meter bezogen werden. Dann ist $\sigma = 7\,000\,000$ kg/qm und nach Gl. 3 $\frac{c^2}{2g} = \frac{\sigma}{\gamma} = \frac{7\,000\,000}{7800} =$ rund 900 m, also $c = 133$ m/sek.

Will man mit $\sigma = 700$ kg/qcm rechnen, so muss man $\gamma = 0{,}0078$, dem Gewichte eines Kubikcentimeters und $g = 981$ cm/sek.² setzen, dann wird $\frac{c^2}{2g} = \frac{700}{0{,}0078} = 90\,000$ cm; $c = 13\,300$ cm/sek.

Ein **Bleistab** von der Dichte $\gamma = 11\,400$ kg/cbm und einer Zugfestigkeit $= 130$ at erreicht diese Grenze der Festigkeit bei $\frac{c^2}{2g} = \frac{1\,300\,000}{11\,400} = 114$ m und $c = 47$ m/sek.

Ein **Ring** vom Halbmesser r, der mit der Geschwindigkeit c gleichmässig umläuft (Fig. 113), erfährt ebenfalls Spannungen. Schneidet man aus dem Ringe ein Theilchen vom Mittelpunktswinkel $d\alpha$ heraus und nimmt an, dass sich die Spannkraft gleichmässig über den Querschnitt F des Ringes vertheile (was bei geringer Wandstärke zulässig ist), so entstehen an den Schnittstellen die Spannkräfte σF, welche mit der Centrifugalkraft $m \cdot r \cdot \omega^2 = \frac{m c^2}{r}$ im Gleichgewicht sein müssen. Dann folgt aus dem Krafteck

Fig. 113.



$$2\sigma F \sin\frac{d\alpha}{2} = \sigma F \cdot d\alpha = \frac{m c^2}{r} \quad \text{und, weil}$$

$$m = \frac{\gamma}{g} r \cdot d\alpha \cdot F,$$

4) $$\sigma = \gamma \frac{c^2}{g} = 2\gamma \frac{c^2}{2g},$$

d. i. das Doppelte von σ_{max} in Gl. 3 für den geraden Stab.

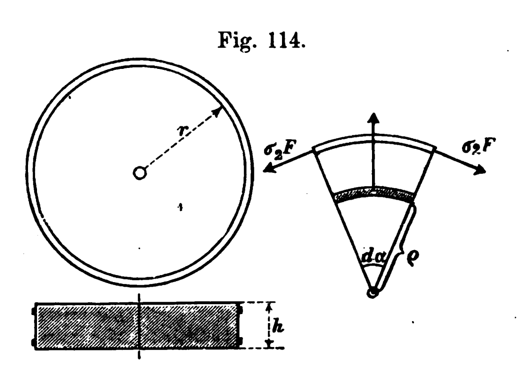
Beispiel: Soll ein dünner Schmiedeisenring auf die Spannung $\sigma = 700$ at gebracht werden, so ist dazu eine Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g} = \frac{\sigma}{2\gamma} = \frac{7\,000\,000}{2 \, . \, 7800}$ $= 450$ m, also eine Umfangsgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{2\,g \cdot 450} = 94 \text{ m/sek.}$$

erforderlich. Diese Umfangsgeschwindigkeit darf von einem schmiedeisernen Schwungrade nicht überschritten werden, wenn $\sigma = 700$ at als zulässige Spannungsgrenze angenommen wird. Ein Bleiring gelangt schon bei $c = 47 \sqrt{1/2}$ $= 47 \cdot 0{,}707 = 33$ m/sek. (vgl. das vorige Beispiel) an die Grenze der Festigkeit.

Spannungen der Ringe eines Mühlsteins. Einen Mühlstein pflegt man aus einzelnen Stücken zusammenzukitten, da es schwer hält, bei einem natürlichen Steine solcher Grösse die wünschenswerthe Gleichmässigkeit des Gefüges zu erzielen. Die Zugfestigkeit des zusammengesetzten Steines genügt nun aber nicht, um bei schneller Drehung den Zusammenhang zu sichern; er wird daher durch umgelegte Eisenringe vor dem Zerreissen bewahrt. Der Mühlstein habe den Halbmesser r, die Höhe h, die Dichte γ_1; es sei F der Gesammtquerschnitt der Ringe, γ die Dichte derselben. Bei der Berechnung der Ringspannungen setzen wir voraus, dass die Festigkeit des Steines unerheblich sei, dass also der Zusammenhalt nur durch die Ringe gesichert wird. Die Spannung σ der Ringe rührt mit dem

Fig. 114.



Betrage $\sigma_1 = \gamma \frac{c^2}{g}$ (Gl. 4) von der eigenen Masse her; nun muss auch noch der Betrag σ_2, der durch die Masse des Steines bedingt ist, berechnet werden. Trennt man aus dem Stein einen Ausschnitt vom Mittelpunktswinkel $d\alpha$ ab, so entspricht einem unendlich kleinen Ringtheilchen vom Halbmesser ϱ eine Centrifugalkraft $dm\varrho\omega^2$, mithin dem ganzen Ausschnitt eine solche von der Grösse $\omega^2 \varrho \Sigma dm$, worin $\varrho_0 = {}^2/_3 r$; $\Sigma dm = \frac{\gamma_1}{g} \frac{r^2 d\alpha}{2} h = m$ (Masse des Ausschnittes).

Die Centrifugalkraft wird daher

$$m\varrho_0\omega^2 = \frac{\gamma_1}{g}\frac{r^2\cdot d\alpha}{2}h\frac{2}{3}r\omega^2$$

$$= \frac{\gamma_1}{g}\frac{h\cdot d\alpha}{3}rc^2;$$

sie muss von den Spannkräften $\sigma_2 F$ im Gleichgewichte gehalten werden. Dies führt mittels eines ähnlichen Kraftecks wie in Fig. 113 zu der Gleichung

$$\sigma_2 F\cdot d\alpha = m\varrho_0\omega^2 = \frac{\gamma_1}{g}\frac{h\cdot d\alpha}{3}rc^2, \text{ woraus}$$

$$\sigma_2 = \frac{\gamma_1}{g}\frac{hr}{3F}c^2,$$

so dass die Gesammtspannung der Ringe wird

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{c^2}{g}\left(\gamma + \gamma_1\frac{hr}{3F}\right).$$

Für den erforderlichen Ringquerschnitt ergiebt sich dann

$$F = \frac{1}{3}\frac{\gamma_1 hrc^2}{g\sigma - \gamma c^2}.$$

Beispiel: Soll für einen Mühlstein von 0,7 m Halbmesser und 0,3 m Höhe der Querschnitt der Ringe in qcm berechnet werden, so beziehen wir sämmtliche Zahlen auf cm, setzen $r = 70$, $h = 30$, $\gamma_1 = 0{,}0024$, $\gamma = 0{,}008$ (rund), $g = 981$, die sekundliche Umfangsgeschwindigkeit $c = 9$ m $= 900$ cm, die zulässige Spannung der Eisenringe $\sigma = 200$ at (so gering, weil ein Maschinentheil vorliegt, der nicht in fortwährender gleichmässiger Bewegung ist, sondern bald ruht, bald umläuft, so dass auch die Spannung und somit die elastische Dehnung häufigem Wechsel unterworfen ist. Auch kommen noch Spannungen durch die Widerstände des Mahlgutes hinzu, die nicht genau angebbar sind.) Man erhält daher:

$$F = \frac{1}{3}\frac{0{,}0024\cdot 30\cdot 70\cdot 900^2}{981\cdot 200 - 0{,}008\cdot 900^2} = 7{,}3 \text{ qcm}.$$

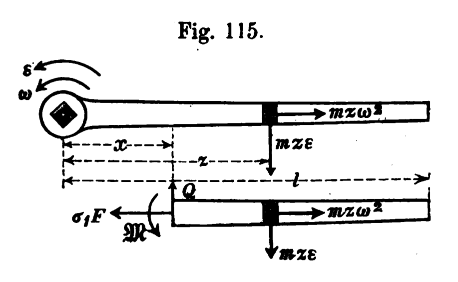
Dieser Gesammtquerschnitt ist auf mehrere, zweckmässig angeordnete Ringe zu vertheilen.

3. Ungleichförmige Drehung um eine feste Achse.

Die Drehachse möge mittels eines Vierkantes dem Stab eine Winkelbeschleunigung ε (Fig. 115) etwa links herum ertheilen; dann hat ein Massentheilchen m im Abstande z von der Achse

ausser der von der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit ω herrührenden Centripetalbeschleunigung $z\omega^2$ noch eine Umfangsbeschleunigung $z\varepsilon$. Als Ergänzungskraft tritt daher ausser der Centrifugalkraft noch eine Kraft $mz\varepsilon$ auf, welche rechtwinklig zur Stabrichtung — in Fig. 115 abwärts — gerichtet ist. Die Spannkräfte einer Schnittstelle haben daher nicht nur einer Längskraft, sondern auch quer gerichteten Kräften das Gleichgewicht zu halten; letztere verursachen ein Biegungsmoment und rufen an der Schnittfläche ein Spannungsmoment hervor. Die Centrifugalkräfte bedingen eine über die Schnittfläche gleichmässig vertheilte Spannung σ_1, welche nach Gl. 1, S. 101 zu berechnen ist. Ist σ_2 die stärkste Biegungsspannung an der Schnittstelle und ist $\mathfrak{W}$ das Widerstandsmoment der Querschnittfigur, so ist $\sigma_2 \mathfrak{W}$ das Spannungsmoment. Zum Biegungsmomente für Querschnitt x liefert das eine Massentheilchen m den Beitrag $mz\varepsilon(z-x)$. Dies ist von $z=x$ bis $z=l$ zu integrieren. Daher wird

Fig. 115.



$$\sigma_2 \mathfrak{W} = \mathfrak{M} = \varepsilon \int_{z=x}^{z=l} m z (z - x).$$

Darin ist $m = \frac{\gamma}{g} F_z dz$, wenn F_z der Querschnitt im Abstande z von der Drehachse

Gehen wir nun wieder zu einem **prismatischen** Stabe mit $F_x = F$ und mit $m = \frac{\gamma}{g} F \cdot dz$ über, so wird

$$\sigma_2 \mathfrak{W} = \frac{\gamma}{g} \varepsilon F \int_x^l (z^2 - xz)\, dz = \frac{\gamma}{g} \varepsilon F \left(\frac{l^3 - x^3}{3} - x \frac{l^2 - x^2}{2} \right).$$

Führt man die Umfangsgeschwindigkeit $c = l\omega$ und die Umfangsbeschleunigung $p = l\varepsilon$ ein, so wird

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \gamma \left\{ \frac{c^2}{2g} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) + \frac{p}{g} \frac{F}{\mathfrak{W} l} \left(\frac{l^3 - x^3}{3} - x \frac{l^2 - x^2}{2} \right) \right\}.$$

Der gefährliche Querschnitt liegt (wie bei gleichförmiger Drehung) dicht an der Achse mit $x = 0$, und es wird

$$\sigma_{max} = \gamma \left\{ \frac{c^2}{2g} + \frac{p}{g} \frac{F l^2}{3 \mathfrak{W}} \right\}.$$

Beispiel: Solchen Spannungen sind besonders Degenklingen ausgesetzt, wenn ihnen durch die Hand des Fechters eine heftige Drehbeschleunigung in der Richtung quer zur Schärfe ertheilt wird. Nimmt man den Querschnitt annähernd als Rechteck, die Breite $b = 1{,}5$ cm, die Dicke $d = 0{,}4$ cm, die Länge $l = 90$ cm an, so wird $\mathfrak{W} = {}^1/_6\, F d$. Die Spannung σ_1 ist in solchen Fällen unbedeutend, da die einzelnen Bewegungen viel zu kurze Dauer haben, als dass bedeutende Umfangsgeschwindigkeiten c entstehen könnten. Es sind hier nur die Umfangsbeschleunigungen wichtig. Wir setzen daher

$$\sigma = \sigma_2 = \gamma \frac{p}{g} \frac{F l^2}{3 \mathfrak{W}} = \gamma \frac{p}{g} \frac{2 l^2}{d} = 0{,}008 \cdot \frac{p}{g} \frac{2 \cdot 90^2}{0{,}4} = 324 \frac{p}{g}.$$

Es erfordert dies (nach 1. Theil, 2. Aufl., S. 280) ein Kraftmoment der Hand

$$\mathfrak{M} = \varepsilon J = \frac{1}{3} M l^2 \varepsilon = \frac{1}{3} p M l = \frac{1}{3} \frac{p}{g} \gamma F l^2 = 12{,}96 \frac{p}{g} \text{ mkg}.$$

Ist in einem besonderen Falle $p = 5 g$, so wird die stärkste Spannung $\sigma = 1620$ at, das Kraftmoment der Hand $\mathfrak{M} = 64{,}8$ cmkg. Daraus erklärt es sich, dass bei einem geübten Fechter, der ein grösseres $\mathfrak{M}$ zu leisten vermag, die Klinge durch einen Lufthieb zerbrechen kann, wozu auch noch der hier nicht berücksichtigte Luftwiderstand beiträgt.

C. Formänderungs-Arbeit elastisch-fester Körper.

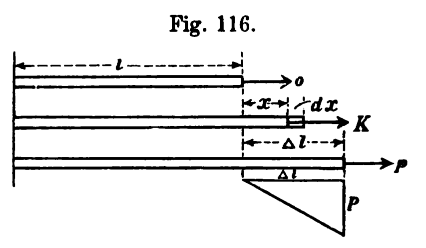
Während bisher das Vorhandensein eines bestimmten Spannungsmomentes angenommen wurde, sollen nun die Vorgänge beim Entstehen der Spannungen und Formänderungen untersucht werden. Es kommt hierbei vor Allem auf die Bestimmung der bei der Formänderung von den äusseren und inneren Kräften verrichteten Arbeit, der sog. Formänderungs-Arbeit, an.

I. Arbeit bei der Verlängerung und Verkürzung gerader Stäbe.

Ein prismatischer Stab von der Länge l und dem Querschnitt F sei an dem einen Ende (links in Fig. 116) befestigt; am anderen freien Ende wirke eine im Schwerpunkte der Endfläche angreifende

Zugkraft K. Diese Kraft soll aber der Grösse nach nicht gleichbleibend sein, sondern sie soll langsam und stetig von Null bis zu einem Werthe P anwachsen. Dann wird mit jeder kleinen Zunahme der Kraft eine kleine Zunahme der Verlängerung verbunden sein. Die Zunahme der Kraft möge langsam vor sich gehen, damit auch die Verlängerung langsam erfolge, daher kein Theil des Stabes ein nennenswerthes Arbeitsvermögen erfahre, so dass man in jedem Augenblicke den Stab als in Ruhe, im Gleichgewichte befindlich betrachten kann. Dem beliebigen Zwischenwerthe K der veränderlichen Kraft entspreche eine Verlängerung x, mithin ein Verlängerungs-Verhältnis oder eine Dehnung

Fig. 116.



$$\varepsilon_x = x : l$$

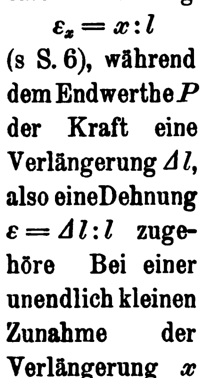
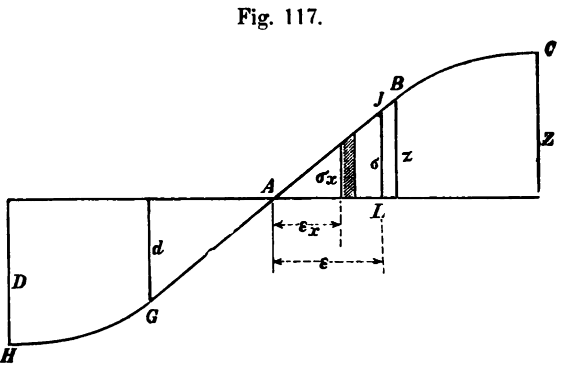

(s S. 6), während dem Endwerthe P der Kraft eine Verlängerung Δl, also eine Dehnung $\varepsilon = \Delta l : l$ zugehöre Bei einer unendlich kleinen Zunahme der Verlängerung x

Fig. 117.



um dx verrichtet K die Arbeit $d\mathfrak{A} = K \cdot dx$. Setzt man nun $K = F\sigma_x$, $P = F\sigma$, so wird auch

$$d\mathfrak{A} = F\sigma_x l \cdot d\varepsilon_x$$

und die Gesammtarbeit bei der Verlängerung um $\Delta l = l\varepsilon$:

1) $$\mathfrak{A} = Fl \int_0^{\varepsilon} \sigma_x \cdot d\varepsilon_x.$$

Die Beziehung zwischen σ_x und ε_x wird mittels der Dehnungslinie (s. S. 7) zum Ausdrucke gebracht. Hat diese für den vorliegenden Körper die Form $HGABC$ (Fig. 117), wobei die von A aus gemessenen Abscissen die Dehnungen ε_x, die zugehörigen Ordi-

naten aber die Spannungen σ_x bedeuten, so wird der Ausdruck $\sigma_x \cdot d\varepsilon_x$ in der letzten Gleichung durch den schraffirten Flächenstreifen der Dehnungslinie (Fig. 117) dargestellt; sein Integral ergiebt daher die ganze Fläche von A bis zu dem Endwerth $\varepsilon = AL$ der erzeugten Dehnung, d. h. die Fläche AJL, so dass die zur Verlängerung um $\Delta l = l\varepsilon$ erforderliche Arbeit wird:

2) $$\mathfrak{A} = F \cdot l \cdot AJL.$$

Ist die Dehnungslinie bekannt, so kann man die Fläche AJL stets ermitteln.

Für die weiteren Entwickelungen nehmen wir ein gleich bleibendes Verhältnis zwischen Spannung und Dehnung an, setzen also voraus, dass die Spannung z an der Elasticitäts- oder Proportionalitätsgrenze nicht überschritten werde (vgl. S. 6). Dann ist AJL ein Dreieck von der Fläche $\frac{1}{2}\sigma\varepsilon$ (Fig. 118), so dass

Fig. 118.

3) $$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} Fl\sigma\varepsilon = \tfrac{1}{2} P \cdot \Delta l$$

wird, wofür man wegen $\varepsilon = \sigma : E$ auch schreiben kann

4) $$\mathfrak{A} = \frac{Fl\sigma^2}{2E}.$$

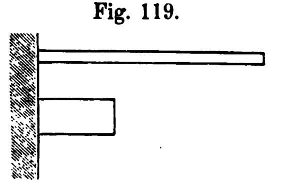
Bezeichnet man den Rauminhalt Fl des Stabes mit V, so wird noch einfacher

5) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E}.$$

Dies ist die Arbeit, welche erforderlich ist, um einen prismatischen Stab vom Rauminhalte V aus dem spannungslosen Zustand langsam in den Zustand einer überall gleichen Spannung σ zu versetzen.

Am leichtesten zu merken ist die Form $\mathfrak{A} = \frac{1}{2} P \cdot \Delta l$, d. h. gleich dem Inhalt des Dreiecks in Fig. 116, unten; $\frac{1}{2} P$ ist die mittlere Kraft, Δl der Weg des Angriffspunktes.

Fig. 119.



Bei Gl. 5 ist zunächst auffällig, dass die Verlängerungsarbeit nicht von dem Querschnitt und der Länge des Stabes im Einzelnen, sondern nur von seinem Inhalte V abhängt,

dass also ein langer Stab von kleinem Querschnitte dieselbe Arbeit zur Erzeugung der Spannung σ erfordert wie ein kurzer dicker Stab (Fig. 119), wenn beide nur gleichen Rauminhalt haben. Es erklärt sich dies (abgesehen von der vorstehenden Ableitung) daraus, dass die Arbeit ein Produkt aus dem Wege $\Delta l = l\sigma : E$ und dem Mittelwerthe der gleichmässig von 0 bis P anwachsenden Kraft, d. h. $\frac{1}{2}P = \frac{1}{2}\sigma F$ ist. Bei dem dünnen, langen Stabe ist $\frac{1}{2}P$ verhältnismässig klein, Δl aber gross; bei dem dicken Stabe dagegen ist $\frac{1}{2}P$ gross und Δl entsprechend kleiner, so dass das Produkt in beiden Fällen den gleichen Werth erhält.

Wendet man auf diesen Vorgang der langsamen Verlängerung das allgemeine Gesetz der Arbeit (1. Theil, 2. Aufl., S. 145, Gl. 1) an:

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} m c^2 = \Sigma \mathfrak{A}_k + \Sigma \mathfrak{A}_i,$$

so ist die Zunahme des Arbeitsvermögens = Null zu setzen, da weder zu Anfang noch zu Ende eine nennenswerthe Geschwindigkeit vorhanden ist. Daher muss die Summe der äusseren und der inneren Arbeiten Null sein. Da nun die Arbeit der äusseren Kraft $\mathfrak{A}_k = \frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E}$ gefunden wurde, so muss die Arbeit der inneren Spannkräfte

$$6) \qquad \mathfrak{A}_i = -\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E} = -\frac{P}{2}\Delta l$$

sein.

Kehrt der Stab aus dem Zustande der Spannung σ langsam in den spannungslosen Zustand zurück, so hat die Richtung der Bewegung des Angriffspunktes der Zugkraft entgegengesetzten Sinn im Vergleiche mit dem Sinne der Kraft, mithin kehrt sich das Vorzeichen von $\mathfrak{A}_k$ um, es wird $\mathfrak{A}_k = -\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E}$; zugleich wird dann $\mathfrak{A}_i = +\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E}$.

Wird ein Stab durch eine allmählich anwachsende Druckkraft um Δl verkürzt, so verrichtet die Kraft eine positive Arbeit, weil bei der Verkürzung eine Bewegung des Stabendes im Sinne der Druckkraft erfolgt. Diese Arbeit berechnet man in gleicher Weise wie die Arbeit der Verlängerung zu $\mathfrak{A} = +\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E}$. Die

Übereinstimmung ergiebt sich auch schon daraus, dass die Vertauschung der Zugspannung $+\sigma$ mit der Druckspannung $-\sigma$ in σ^2 keine Änderung herbeiführt. Man hat also den Satz:

Wird ein Stab vom spannungslosen Zustand aus durch eine von 0 bis P anwachsende Zug- oder Druckkraft innerhalb der Elasticitätsgrenze allmählich verlängert bezw. verkürzt, so ist in beiden Fällen die äussere Arbeit positiv, die innere negativ; für die Rückkehr in den spannungslosen Zustand gilt das Entgegengesetzte. Der absolute Werth dieser Arbeiten ist

7) $$\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E}, \quad \text{wobei} \quad \sigma = \frac{P}{F}.$$

Es ist nützlich, die Verlängerungs- und Verkürzungs-Arbeit, welche prismatische Stäbe aus verschiedenem Stoff innerhalb der Elasticitätsgrenze ertragen können, vergleichend zusammenzustellen. Man bezieht diese Arbeiten zweckmässig auf 1 ^{ccm} Rauminhalt, hat also mit $V = 1$ nur $\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}$ zu berechnen, wobei $\sigma = z$ bezw. d (Spannungen an der Elasticitätsgrenze) zu setzen ist. Auf Grund der Zahlenwerthe der Tabelle S. 9 ergeben sich dann folgende Arbeitswerthe in $^{\text{cmkg}}/_{\text{ccm}}$:

Formänderungs-Arbeit $\sigma^2 : 2E$ bis zur Elasticitätsgrenze für 1 ^{ccm}.

Stoff	Verlängerungs-Arbeit	Verkürzungs-Arbeit
Gusseisen	$\frac{1}{2}\frac{600^2}{1\,000\,000} = 0{,}18$	$\frac{1}{2}\frac{1600^2}{1\,000\,000} = 1{,}28$
Stabeisen	$\frac{1}{2}\frac{1600^2}{2\,000\,000} = 0{,}64$	$\frac{1}{2}\frac{1600^2}{2\,000\,000} = 0{,}64$
Gussstahl	$\frac{1}{2}\frac{4500^2}{2\,200\,000} = 4{,}6$	$\frac{1}{2}\frac{4500^2}{2\,200\,000} = 4{,}6$
Holz	$\frac{1}{2}\frac{250^2}{120\,000} = 0{,}26$	$\frac{1}{2}\frac{170^2}{120\,000} = 0{,}12$
Glas	$\frac{1}{2}\frac{340^2}{1\,000\,000} = 0{,}058$	$\frac{1}{2}\frac{1450^2}{1\,000\,000} = 1{,}05$
Kautschuk	$\frac{1}{2}\frac{20^2}{10} = 20$	

Hierbei ist zu beachten, dass Gussstahl 7 Mal so viel Arbeit ertragen kann, wie Stabeisen, während seine Elasticitätsgrenze noch nicht 3 (genauer 4500 : 1600) Mal so hoch liegt. Wo es sich daher um die Aufnahme von Arbeiten handelt, kann der kostspielige Gussstahl vortheilhafter sein als Stabeisen. Holz ergiebt grössere Verlängerungsarbeit als Gusseisen; es ist in dieser Beziehung der kleine Werth von E d. h. die grössere Nachgiebigkeit von Nutzen. In erheblichem Maſse günstig ist dieser Umstand beim Kautschuk Dieser Stoff ist bei gleichem Rauminhalte dem Gussstahl etwa 4,3 Mal überlegen. Kautschuk würde daher für Feder-Anordnungen, bei denen es sich um die Aufnahme von Arbeit handelt, der vortheilhafteste Stoff sein, wenn er eine grössere Dauer hätte. In früherer Zeit hat man bei den Eisenbahn-Fuhrwerken die Kautschukfedern in grossem Umfange verwendet, hat aber gefunden, dass Kautschuk seine guten Eigenschaften zu bald verliert. Guter Kautschuk kann freilich im spannungslosen Zustande unter gewissen hier nicht weiter zu besprechenden Umständen 30 Jahre lang gut elastisch bleiben; im gespannten Zustande aber wird er bald brüchig und hart.

a) Einwirkung plötzlicher Belastung. Hängt ein Körper vom Gewichte Q ruhend am unteren Ende eines lothrechten, oben befestigten Stabes vom Querschnitt F und der Länge l, so herrscht in dem Stabe, dessen Eigengewicht wir vernachlässigen, die Spannung

8) $$\sigma_0 = Q : F,$$

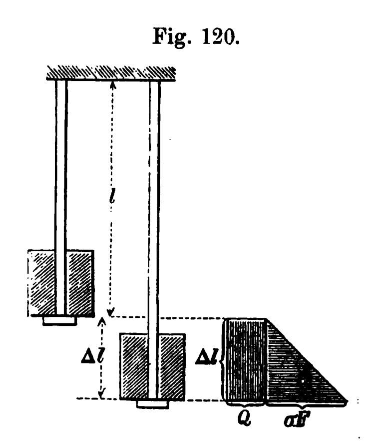
und seine elastische Verlängerung beträgt $\varDelta l_0 = \frac{Q}{F} \cdot \frac{l}{E}$.

Wird aber der zu Anfang in geeigneter Weise unterstützte Körper mit dem unteren Ende des spannungslosen Stabes verbunden und dann seiner Unterstützung plötzlich beraubt, so übt der Stab im nächsten Augenblicke noch keine Kraft auf den Körper aus, weil er noch die Länge l des spannungslosen Zustandes hat. Der Körper steht also anfänglich unter alleiniger Wirkung der Schwere und wird eine lothrechte Bewegung mit der Fallbeschleunigung beginnen (Fig. 120, linke Seite). Hierbei erfährt der Stab eine zunehmende Verlängerung, also auch eine wachsende Spannkraft, die dem Gewichte Q entgegenwirkt. Aber erst, wenn der Körper um die Grösse $\varDelta l_0 = \frac{Q}{F} \cdot \frac{l}{E}$ gesunken ist, hat die Spannkraft die Grösse Q erreicht, so dass in diesem Augenblicke die Beschleunigung des Körpers Null beträgt. Da bis hierher die Bewegung eine beschleunigte war, so wird der Körper eine gewisse Geschwindigkeit c erlangt haben, die erst bei weiterer Verlängerung des Stabes, bei weiterem Anwachsen seiner Spannkraft, allmählich zu Null gemacht

werden kann. Der Stab wird also eine grösste Verlängerung $\Delta l > \Delta l_0$, daher auch eine stärkste Spannung $\sigma > \sigma_0$ erfahren. Diese Werthe Δl und σ lassen sich mittels des Satzes der Arbeit berechnen.

Zu Anfang hatte der Körper die Geschwindigkeit Null, das gleiche findet statt in dem Augenblicke der stärksten Verlängerung der Stange (Fig. 120, rechte Seite); denn wenn im nächsten Zeittheilchen dt die Weglänge ds Null betragen soll, so muss $v = ds : dt =$ Null sein. In dem Verlaufe der Abwärts-Bewegung ist daher die gesammte Änderung des Arbeitsvermögens des Körpers Null, somit auch die gesammte Arbeit. Nun verrichtet das Gewicht Q die Arbeit $Q \cdot \Delta l$, dargestellt durch ein Rechteck. Die Arbeit der inneren Kräfte aber beträgt, wenn der Stab vollkommen elastisch bleibt, längs eines Weges Δl (nach Gl. 6, S. 109): $-\frac{V}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{E} = -\frac{P}{2} \cdot \Delta l$, dargestellt durch ein Dreieck, in welchem P den (grössten) Endwerth der Spannkraft, d. h. σF bedeutet. Die absoluten Werthe beider Arbeiten, d. h. die Inhalte der beiden Figuren müssen einander gleich sein, damit die Arbeitssumme Null werde. Also wird

Fig. 120.



$$^1/_2 \sigma F \Delta l = Q \Delta l, \text{ oder}$$

9) $$\sigma = 2Q : F = 2\sigma_0 \text{ und ebenso}$$

10) $$\Delta l = 2\Delta l_0.$$

In der tiefsten Lage beträgt die Spannkraft des Stabes $\sigma F = 2Q$; der Körper steht dann einen Augenblick unter Einwirkung einer a u f w ä r t s gerichteten Mittelkraft $2Q - Q = Q$ und erfährt dadurch eine aufwärts gerichtete Beschleunigung g. Die Spannkraft wird so lange über die Schwere das Übergewicht haben, bis wieder die Gleichgewichtslage erreicht ist. Der Körper wird aber erst wieder die Geschwindigkeit Null haben, wenn er um h gestiegen ist, wenn die positive Arbeit des sich verkürzenden

Körpers gleich dem absoluten Werthe der negativen Arbeit der Schwere, wenn also

$$\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E}=Qh$$

geworden ist. Setzt man hierin $V=Fl$, $\sigma=2Q:F$ ein, so entsteht $h=2\frac{Ql}{FE}=2\Delta l_0=\Delta l$, d. h. der Körper kommt auf die ursprüngliche Höhe zurück, und nun kehren die Vorgänge der ersten Auf- und Niederbewegung fortgesetzt wieder. Eine solche, in gleicher Weise zwischen zwei Orten hin und her gehende Bewegung nennt man eine Schwingung. Wir haben daher den Satz:

Wird ein elastischer Stab plötzlich der vollen Einwirkung eines Gewichtes unterworfen, so erfährt er dadurch eine stärkste Spannung, welche das **Doppelte** der Gleichgewichtsspannung beträgt. Der an dem Stabe hängende Körper führt zwischen der höchsten und tiefsten Lage Schwingungen aus, u. zw. um die Gleichgewichtslage als Mitte. Diese Schwingungen werden durch Luftwiderstand und dadurch, dass der Stab sich nicht vollkommen elastisch verhält, allmählich kleiner, und Stab und Körper gehen endlich in die Ruhe- oder Gleichgewichtslage über. Die äussere (somit auch die innere) Arbeit, welche zu verrichten ist, um den Körper Q erstmals aus der Ruhelage durch plötzliche Entfernung seiner Stützung in die tiefste Lage zu bringen, beträgt das Vierfache wie bei langsamer, bis zu Q zunehmender, Belastung des Stabes. Während nämlich nach S. 108 $\mathfrak{A}_k = {}^1/_2 Q\cdot\Delta l$ war, wird jetzt

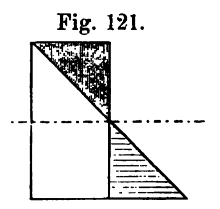
11) $$\mathfrak{A}_k = Q\cdot\Delta l = \frac{V}{2}\cdot\frac{\sigma^2}{E} = \frac{\sigma F\cdot\Delta l}{2} = -\mathfrak{A}_i\,,$$

wobei aber σ und Δl doppelt so gross sind, wie bei Gl. 5 und 6 S. 108/9.

Die veränderliche, auf den Körper wirkende Gesammtkraft bringt man am deutlichsten zur Anschauung, wenn man die beiden Arbeitsflächen $Q\cdot\Delta l$ und $\sigma\cdot F\cdot\Delta l:2$ der Fig. 120 mit entgegengesetztem Vorzeichen in einander schiebt, so dass man den Unterschied der beiden Kräfte unmittelbar abmessen kann. Man erhält dann Fig. 121, welche im oberen Theil nach abwärts gerichtete,

positive, im unteren Theil nach aufwärts gerichtete, also negative Kräfte zeigt; in der Mitte ist die Gesammtkraft gleich Null. Der positive Theil dieser Darstellung der in jeder Lage wirkenden Gesammtkraft ist lothrecht, der negative Theil wagerecht geschrafft.

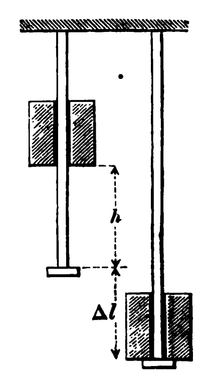
Fig. 121.



Derartige Fälle plötzlicher Belastung kommen in der Anwendung sehr häufig vor. Und dieser Umstand ist einer der Gründe dafür, dass man (s. S. 11) bei einer statischen Berechnung die zulässige Spannung σ_0 erheblich kleiner als die Spannung an der Elasticitätsgrenze wählt. Wird z. B. der Querschnitt F des Stabes unter Annahme des Gleichgewichts für eine Spannung $0{,}5z$, also $F = Q : 0{,}5z$ berechnet, so wird bei plötzlicher Belastung die wahre Spannung $= z$ (Elasticitätsgrenze) werden.

Will man ein kleines Gewicht an einen Kautschukfaden, oder ein grosses an eine Hängestange, eine Kette, einen Krahn derartig anhängen, dass in den genannten elastischen Körpern die stärkste Spannung nicht erheblich grösser als die Gleichgewichts-Spannung werde, so darf man dem Körper die anfängliche Unterstützung nicht plötzlich nehmen, sondern muss die unterstützenden Vorrichtungen (bei einem kleinen Gewichte vielleicht die Hand, bei einem grösseren eine Windevorrichtung) nur langsam senken. Dabei wird dann das Gewicht des Körpers allmählich auf den Faden, die Stange oder Kette übertragen, während die Stützvorrichtung in demselben Mafs entlastet wird. Auf diese Weise erfährt der Körper keine nennenswerthe Geschwindigkeit und wird in dem Augenblicke, wo die Spannkraft des Fadens, der Stange oder Kette gleich dem Gewichte des Körpers geworden ist, seine Senkung beenden und im Gleichgewichte verbleiben. Bei verhältnismässig grossen Lasten ist dieses Verfahren schwer anzuwenden, deshalb darf man bei der Berechnung von Hängestangen, Ketten, Krahnen u. dergl. auf diesen günstigen Umstand nicht sicher rechnen und wird daher die zulässige Spannung (für ruhende Last) entsprechend klein anzusetzen haben.

Fig. 122.



Die Gleichgewichtsspannung σ_0 wird in noch stärkerem Grad überschritten, wenn der Körper in dem Augenblicke, wo er auf den spannungslosen Stab zu wirken beginnt, schon eine Geschwindigkeit c im Sinne der Verlängerung der Stange hat, indem er, etwa mittels einer Bohrung an dem Stabe gleitend, von einer Höhe h auf einen Vorsprung am

unteren Stabende herabfällt (Fig. 122). Ist Δl die grösste Verlängerung des Stabes, so hat nach deren Entstehung der fallende Körper seine tiefste Lage und die Geschwindigkeit Null erreicht; die Änderung des Arbeitsvermögens zwischen der höchsten und tiefsten Lage des Körpers ist also wiederum gleich Null. Da der Körper um $h + \Delta l$ sinkt, so ergiebt sich statt Gl. 11

12) $$\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E} = Q(h + \Delta l),$$

oder, mit $$\Delta l = \frac{\sigma l}{E}:$$

$$\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E} = Qh + \frac{Q\sigma l}{E}.$$

Diese Gleichung giebt, nach σ aufgelöst:

$$\sigma = \frac{Ql}{V} \pm \sqrt{\frac{Q^2 l^2}{V^2} + \frac{2QhE}{V}}$$

oder, wenn man $V = Fl$, $Q:F = \sigma_0$, also $Q:V = \sigma_0 : l$ setzt,

13) $$\sigma = \sigma_0 + \sqrt{\sigma_0{}^2 + 2\sigma_0 \frac{h}{l} E}.$$

(Ein negatives Zeichen vor dem Wurzelausdrucke hat für die vorliegende Aufgabe keine Bedeutung, da es sich nur um einen positiven Werth σ handeln kann.)

Beispiel: Der Eisenstab habe $F = 4^{\text{qcm}}$ Querschnitt und $l = 5^{\text{m}} = 500^{\text{cm}}$ Länge, der Körper Q habe 100^{kg} Gewicht und nur $h = 10^{\text{cm}}$ Fallhöhe; dann ist die Gleichgewichts-Spannung $\sigma_0 = 25^{\text{at}}$, d. h. ganz unerheblich. Dagegen wird

$$\sigma = 25 + \sqrt{625 + 2000000} = 1439^{\text{at}}.$$

In Folge der Fallhöhe von 10^{cm} entsteht also eine im Vergleiche mit der Ruhe-Spannung sehr erhebliche Anstrengung des Stabes. Die entsprechende Verlängerung beträgt

$$\Delta l = \frac{1439 \cdot 500}{2000000} = 0{,}36^{\text{cm}},$$

ist also gegen $h = 10^{\text{cm}}$ unerheblich.

Man erkennt hieraus, dass für die meisten Fälle Δl gegen h vernachlässigt werden darf; dann vereinfacht sich Gl. 12 zu

14) $$\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E} = Qh,$$

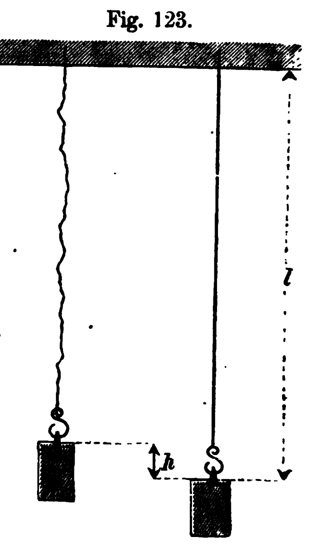
und anstatt Gl. 13 hat man genügend genau

15) $$\sigma = \sqrt{2\sigma_0 \frac{h}{l} E}.$$

In obigem Zahlenbeispiel ergiebt Gl. 15 — : $\sigma = 1414^{at}$ (statt 1439^{at}).

Diese Formel gilt auch für die Spannung eines an seinem oberen Ende befestigten, l^m langen Seiles (Fig. 123), mit dessen unterem Ende ein Körper vom Gewichte Q verbunden ist, falls das Seil zu Anfang nicht gerade gestreckt, sondern derartig schlaff ist, dass der, vorher anderweitig unterstützt gewesene, dann aber losgelassene Körper die Höhe h durchfallen muss, bis das Seil straff wird.

Fig. 123.

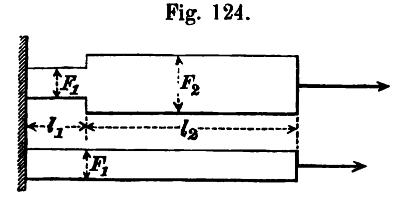


Endlich findet Gl. 15 auch Anwendung für die Berechnung der Spannung des Seiles einer Dampfwinde, wenn ein Körper vom Gewichte Q mit dem anfänglich schlaffen Seile verbunden, die Winde nun aber derartig in Gang gesetzt wird, dass das Seil in dem Augenblicke, wo es straff wird, sich mit einer Geschwindigkeit c bewegt. Bezeichnet man die dieser Geschwindigkeit entsprechende Geschwindigkeitshöhe $c^2 : 2g$ mit h, so muss die Arbeit Qh, welche nöthig ist, um der Last Q die Geschwindigkeit c des Seiles mitzutheilen, durch die Formänderungsarbeit des Seiles von der Winde auf die Last übertragen werden. Man sieht daraus, wie leicht bei unvorsichtigem Betriebe der Winde Seilrisse entstehen können. $c = 2\,^m/_{sek.}$ giebt $h = 0{,}204^m = 20{,}4^{cm}$, was für $Q = 100^{kg}$ und $l = 5^m$, $F = 8^{qcm}$ Querschnitt bedingt, wenn die Elasticitätsgrenze nicht überschritten werden soll.

b) Stab mit sprungweise veränderlichem Querschnitte.

Der Stab möge auf eine Länge l_1 den Querschnitt F_1, auf eine Länge l_2 den grösseren Querschnitt F_2 haben (Fig. 124). Bringt man ihn dann in ähnlicher Weise, wie auf S. 107 beschrieben, durch eine allmählich anwachsende Zugkraft in Spannung, so wird im Querschnitt F_1 die Spannung σ_1, im Querschnitt F_2 die Spannung σ_2 auftreten, zwischen denen die Beziehung besteht $\sigma_2 F_2 = \sigma_1 F_1$, mithin

Fig. 124.



$$\sigma_2 = \sigma_1 \frac{F_1}{F_2} = \frac{\sigma_1}{n};$$

wenn man $F_2 = n F_1$ setzt. Bei der Erzeugung dieser Spannungen muss die wirkende Zugkraft eine Arbeit verrichten, welche nach Gl. 5, S. 108 beträgt:

$$\mathfrak{A} = \frac{V_1}{2} \frac{\sigma_1^2}{E} + \frac{V_2}{2} \frac{\sigma_2^2}{E}$$

oder, auf σ_1 und F_1 zurückgeführt:

16) $$\mathfrak{A} = \frac{\sigma_1^2}{2E} F_1 \left(l_1 + \frac{l_2}{n}\right).$$

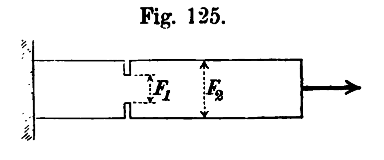
Für die Sicherheit des Stabes im Gleichgewichtszustande kommt nur der kleinste Querschnitt in Frage. Der Rauminhalt $(F_2 - F_1) l_2$, den der vorliegende Stab mehr enthält als ein solcher mit überall gleichem Querschnitt F_1, ist für den Ruhezustand eine Verschwendung. Für die mögliche Arbeitsleistung ist diese Verschwendung an Stoff aber sogar schädlich; denn ein Stab von der Länge $l_1 + l_2$ und dem einheitlichen Querschnitt F_1 nimmt bis zur Spannung σ_1 eine Arbeit auf

17) $$\mathfrak{A}_1 = \frac{\sigma_1^2}{2E} F_1 (l_1 + l_2).$$

Da $n > 1$, so ist $\mathfrak{A}_1 > \mathfrak{A}$, d. h. der Stab von gleichmässiger Stärke erträgt, bis er auf eine Spannung σ_1 kommt, eine grössere Arbeit als der ungleichmässig starke Stab von grösserer Stoffmenge. Gegen Arbeitswirkung verstärkt wird daher der ungleichmässige Stab durch Fortnahme des für den Ruhezustand nur Überflüssigen. (Nach A. Ritter, Technische Mechanik.)

Diese Betrachtungen finden Anwendung auf einen Stab vom Querschnitt F_2, der auf eine geringe Länge l_1 eingekerbt ist, d. h. durch Einsägen, Einschneiden oder auf irgend andere Weise eine Schwächung auf die Querschnittgrösse F_1 erfahren hat (Fig. 125).

Fig. 125.



Es ist dann l_1 gegen l_2 zu vernachlässigen, und wenn man l_2 als Gesammtlänge nunmehr l nennt, geht Gl. 16 über in:

18) $$\mathfrak{A} = \frac{\sigma_1^2}{2E} \frac{F_1 l}{n},$$

während für den gleichmässig auf den Querschnitt F_1 gebrachten Stab

19) $$\mathfrak{A}_1 = \frac{\sigma_1^2}{2E} F_1 l = \frac{\sigma_1^2}{2E} \cdot \frac{V}{n}$$

wird, so dass $\mathfrak{A}_1 : \mathfrak{A} = n$.

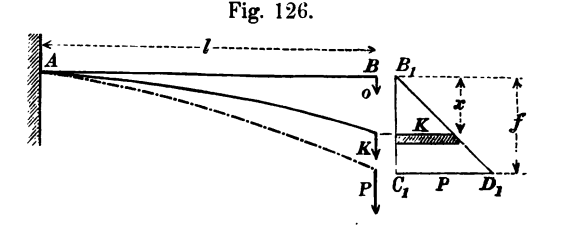
Die Widerstandsfähigkeit eines Stabes gegen Arbeit wird durch Einsägen auf halben Querschnitt auf $^1/_4$ vermindert; man kann sie aber auf $^1/_2$ des ursprünglichen Werthes wieder erhöhen, wenn man durch Wegnahme der Hälfte des Stoffes in zweckmässiger Weise überall den gleichen Querschnitt $F_1 = {}^1/_2 F_2$ herstellt. Noch mehrfach wird sich das Ergebnis zeigen, dass **Körper überall gleicher Sicherheit hinsichtlich der Arbeitsleistung überraschend vortheilhaft sind.** Der innere Grund liegt darin, dass der zulässige Endwerth P der Zugkraft durch F_1 bedingt ist, dass der übermässig grosse Querschnitt F_2 aber die Verlängerung Δl vermindert, wodurch auch das Produkt $^1/_2 P \cdot \Delta l = \mathfrak{A}$ eine Verminderung erfährt. Grosse Formänderungen sind für die Aufnahme von Arbeit vortheilhaft. Ihre Verminderung durch einzelne geschwächte Stellen wirkt sehr nachtheilig. Bei Ankertauen und Ankerketten, die das Arbeitsvermögen bewegter Schiffe durch die Arbeit ihrer Spannkräfte zu vernichten haben, sind Fehlstellen besonders verhängnisvoll.

2. Biegungs-Arbeit.

a) Prismatischer Stab.

Ein prismatischer, bei A (Fig. 126) wagerecht eingespannter Stab werde am freien Ende durch eine von Null ab allmählich durch P anwachsende Kraft gebogen. x sei die Biegung am freien Ende für einen beliebigen Zwischenwerth K der Kraft; f die Durchbiegung, welche dem Endwerthe P der Kraft entspricht. Da nun nach Gl. 7, S. 46:

Fig. 126.



$$x = \frac{K l^3}{3EJ},$$

d. h. K mit x verhältnisgleich, so ist die Beziehung zwischen beiden Grössen wiederum ein Dreieck $B_1 C_1 D_1$ mit $B_1 C_1 = f$, $C_1 D_1 = P$. Das Arbeitstheilchen von K ist $K \cdot dx$, gleich einem Flächenstreifen des Dreiecks, die Gesammtarbeit daher gleich dem Inhalte des ganzen Dreiecks, d. h.

1) $$\mathfrak{A} = {}^1/_2 Pf;$$

es ist wieder ${}^1/_2 P$ der Mittelwerth der veränderlichen Kraft, f die Weglänge. Weil nun

2) $$f = \frac{Pl^3}{3EJ},$$

so wird zunächst $$\mathfrak{A} = \frac{P^2 l^3}{6EJ}$$

und weil ferner $Pl = \sigma \frac{J}{e}$, so ergiebt sich

3) $$\mathfrak{A} = \frac{1}{6} \frac{Jl}{e^2} \frac{\sigma^2}{E},$$

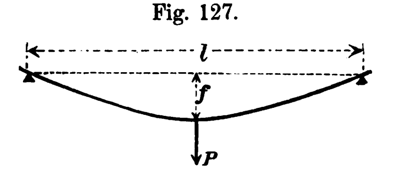
wobei σ die stärkste Biegungsspannung ist, J und e die bekannte Bedeutung (S. 22) haben. Setzt man $J = Fi^2$ (s. S. 66), wo i der Trägheitshalbmesser, so entsteht

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{6} Fl \frac{i^2}{e^2} \frac{\sigma^2}{E} \quad \text{oder}$$

4) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{6} \frac{i^2}{e^2} \frac{\sigma^2}{E},$$

wenn wiederum $Fl = V$ den Rauminhalt des Stabes bedeutet. Das Verhältnis $i:e$ ist nur von der Form, nicht aber von der Grösse des Querschnitts abhängig. Mithin ist bei bestimmter Querschnittsform die zur Erzeugung einer bestimmten Biegungsspannung σ erforderliche Arbeit nur noch von dem Rauminhalte V des Stabes abhängig. Mag also ein Stab mit rechteckigem Querschnitte lang oder kurz sein, mag er hochkantig oder flachliegend befestigt sein — bei gleichem Rauminhalte wird die Biegungsarbeit in allen diesen Fällen die gleiche sein.

Fig. 127.



Die Gültigkeit der Gl. 4 ist auch nicht auf die Befestigungsart nach Fig. 126 beschränkt, vielmehr ergiebt sich der gleiche Werth, wenn man den Stab an beiden Enden unterstützt und in der Mitte belastet (Fig. 127, S. 119). Es ist nämlich wiederum $\mathfrak{A} = {}^1/{}_2 Pf$; setzt man hierin nach Gl. 12 S. 49

$$f = \frac{Pl^3}{48 EJ} \quad \text{und} \quad \frac{Pl}{4} = (\mathfrak{M}_{max} = \mathfrak{W} \cdot \sigma =) \frac{J}{e} \cdot \sigma,$$

so entsteht Gl. 3.

Aus denselben Gründen, die auf S. 109 entwickelt wurden, ist $\mathfrak{A}_i = - \mathfrak{A}$ die Arbeit der inneren Spannkräfte des gebogenen Stabes. Ebenso kehrt sich, wenn die Rückkehr zum spannungslosen Zustande erfolgt, das Zeichen von $\mathfrak{A}$ und somit auch dasjenige von $\mathfrak{A}_i$ um.

Hinsichtlich der Einwirkung einer plötzlichen Belastung ergiebt sich in ähnlicher Weise, wie auf S. 111—113 entwickelt wurde, dass die stärkste Spannung das Doppelte der Gleichgewichtsspannung beträgt und dass der Stab Schwingungen um die Gleichgewichtslage als Mitte ausführen wird.

Für **rechteckigen** Querschnitt ist $J = {}^1/{}_{12} Fh^2$ (S. 24), mithin $i^2 = {}^1/{}_{12} h^2$, $e^2 = {}^1/{}_4 h^2$, $i^2 : e^2 = 1 : 3$, folglich ergiebt Gl. 4

5) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{18} \frac{\sigma^2}{E}.$$

Für **kreisförmigen** Querschnitt ist $J = {}^1/{}_4 Fr^2$ (S. 26), $i = {}^1/{}_4 r^2$, $e^2 = r^2$, daher

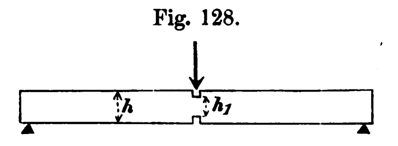
6) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{24} \frac{\sigma^2}{E}.$$

Die Biegungsarbeit ergiebt sich in diesen beiden Fällen (Gl. 5 und 6) nur zu $^1/_9$ bezw. $^1/_{12}$ der Arbeit bei der Längenänderung (S. 108, Gl. 5). Es erklärt sich dies folgendermafsen: Bei der Verlängerung herrscht an allen Stellen aller Querschnitte die gleiche Spannung σ, mithin wird bei einem gezogenen Stabe die Festigkeit bis zu dem gewünschten Grade vollständig ausgenutzt, während beim gebogenen Stabe die stärkste Spannung nur in dem einen Querschnitte, wo das Moment den grössten Werth erreicht, vorkommt, sich in der Längsrichtung jedoch bis auf Null vermindert. Aber auch in dem Querschnitte des grössten Momentes kommt die stärkste Spannung nur im grössten Abstande von der Nulllinie vor, und nimmt nach dieser hin ebenfalls auf Null ab. Die Ausnutzung der Festigkeit ist daher bei dem gebogenen Stabe rechteckigen Querschnitts eine recht ungünstige. Beim Stabe kreisförmigen Querschnitts ist sie freilich noch etwas ungünstiger, weil bei

diesem die stärkste Spannung im gefährlichen Querschnitte nur an den beiden äussersten Punkten (oben und unten) vorkommt, beim rechteckigen Querschnitte aber doch wenigstens über zwei geraden Linien (Oberkante und Unterkante des Querschnitts) sich erstreckt.

Der Einfluss einer Verschwächung ergiebt sich in ähnlicher Weise wie beim gezogenen Stabe, ist aber noch erheblicher als dort, wenn die Einkerbung an den Stellen der stärksten Spannung (oben und unten) erfolgt. Für einen Stab von rechteckigem Querschnitt ist $\mathfrak{A} = \frac{V}{18} \frac{\sigma^2}{E}$. Wird der Stab in der Mitte (Fig. 128) oben und unten eingekerbt, so dass von der Höhe h nur der Theil h_1 widerstandsfähig bleibt, das Widerstandsmoment also von $\frac{1}{6} d h^2$ auf $\frac{1}{6} d h_1^2$ abnimmt, so wird die stärkste Spannung an der Einkerbung $\sigma_1 = \sigma \frac{h^2}{h_1^2}$. Weil nun V und auch die Spannungsverhältnisse des Stabes, abgesehen von der Einkerbung, dieselben geblieben sind, so kann statt Gl. 5 geschrieben werden

Fig. 128.



$$7)\qquad \mathfrak{A} = \frac{V}{18} \frac{\sigma_1^2}{E} \frac{h_1^4}{h^4}.$$

Wird also durch Einkerbung in der Mitte $h_1 = 0{,}8\, h$, so ist $h_1^4 = 0{,}41\, h^4$, also vermindert sich die der Spannung σ_1 entsprechende Biegungsarbeit auf das 0,41 fache derjenigen, welche am ungeschwächten Stab bei der gleichen grössten Spannung nöthig ist.

Von diesem Umstande wird z. B. in Eisenhütten vielfache Anwendung gemacht, wenn man Eisenstäbe durch das Arbeitsvermögen von Hammerschlägen zerbrechen will. Man kerbt den Stab an der gewünschten Bruchstelle mittels eines sog. Schrotmeissels ein, wonach dann der hohl gelegte Stab unter dem Hammerschlage verhältnismässig leicht zerbricht.

b) Stab überall gleicher Sicherheit und gleicher Höhe.

Das Ende eines wagerecht eingespannten Stabes von der Höhe h werde allmählich bis zum Werth P belastet (Fig. 129), dann erhält der Stab bei überall gleicher Sicherheit dreieckige Grundrissform (vergl. S. 41). Seine Durchbiegung wird nach S. 51, Gl. 21 $f = \frac{P l^3}{2 E J}$; seine Biegungsarbeit wird daher nach S. 119, Gl. 1.

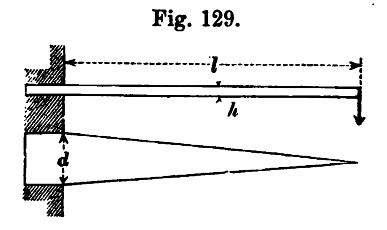
$$\mathfrak{A} = \frac{P f}{2} = \frac{P^2 l^3}{4 E J}; \quad \text{da nun } P l = \sigma \frac{J}{e}, \quad \text{so wird}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4} \frac{J l}{e^2} \frac{\sigma^2}{E} = \frac{1}{4} F l \frac{i^2}{e^2} \frac{\sigma^2}{E}.$$

Jetzt ist aber, wegen der Zuschärfung, der Rauminhalt $V = {}^1\!/_2 Fl$, oder $Fl = 2V$, und weil wieder $i^2 : e^2 = 1 : 3$, so erhält man

8) $$\mathfrak{A} = \frac{Pf}{2} = \frac{V}{6}\frac{\sigma^2}{E},$$

Fig. 129.

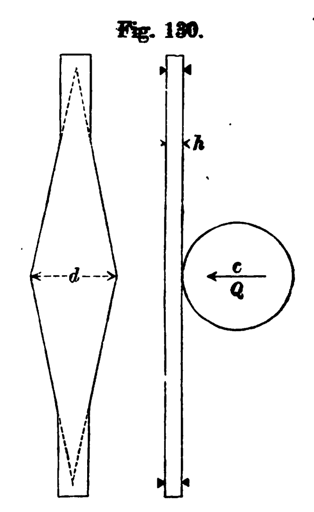


d. h. 3 Mal so gross wie bei einem Stab von gleichem Rauminhalt V, aber mit überall gleichem Querschnitte; denn beim Stabe gleicher Sicherheit tritt die stärkste Spannung σ nicht nur in zwei geraden Querlinien von der Länge d, sondern längs der ganzen oberen und unteren Fläche auf.

Ein prismatischer Stab vom Rauminhalte $V = l \cdot d \cdot h$ kann nach Gl. 5 eine Biegungsarbeit $\mathfrak{A} = \frac{l \cdot d \cdot h}{18}\frac{\sigma^2}{E}$ aufnehmen. Wird derselbe unter Fortnahme der Raummenge ${}^1\!/_2 V$ zu einem Stabe gleicher Sicherheit umgewandelt, so ändert dies an seiner Tragfähigkeit im Gleichgewichtszustande nichts. Seine Arbeitsfähigkeit aber wird nun, weil sein Rauminhalt ${}^1\!/_2 l \cdot d \cdot h$ ist,

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{l \cdot d \cdot h}{12}\frac{\sigma^2}{E} = \frac{3}{2}\mathfrak{A}.$$

Fig. 130.



Die Fortnahme der Raummenge ${}^1\!/_2 V$ hat also die Widerstandsfähigkeit gegen Arbeit auf das $1^1\!/_2$fache vergrössert (vergl. den gesperrt gedruckten Satz auf S. 118).

Auch diese Beziehungen lassen sich ohne Weiteres auf einen Stab von der Länge l mit zwei Endstützen ausdehnen, ganz wie S. 119. Der Grundriss des Stabes erhält dann dieselbe Form, wie bei nachstehend zu besprechender Fig. 130.

Beispiel: Eine Kugel von $Q = 10$ kg Gewicht, die sich mit $c = 4$ m/sek. Geschwindigkeit bewegt, soll durch eine Gussstahl-Feder überall gleicher Sicherheit aufgefangen werden (Fig. 130). Welche Abmessungen muss die Feder erhalten, wenn sie bis zur Elasticitätsgrenze (4500 at) gespannt werden soll?

Es muss nach dem Satze der Arbeit

$$0 - \frac{Q}{g}\frac{c^2}{2} = -\frac{V}{6}\frac{\sigma^2}{E}, \quad \text{mithin}$$

$$V = \frac{6\,E}{\sigma^2}\,Q\,\frac{c^2}{2\,g} \quad \text{sein.}$$

Für Gussstahl ist nach der Tabelle (S. 110)

$$\sigma^2 : 2\,E = 4{,}6\,,$$

wenn man nach Centimetern rechnet. Nun ist die Geschwindigkeitshöhe

$$h = \frac{c^2}{2\,g} = \frac{4^2}{2\,g} = \text{rund } 0{,}8^{\,\text{m}} = 80^{\,\text{cm}}\,,$$

daher

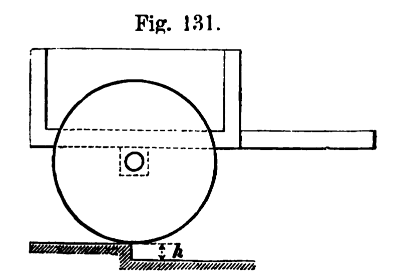
$$V = \frac{3 \cdot 10}{4{,}6}\,80 = 522^{\,\text{ccm}}\,.$$

Wählt man vielleicht die Spannweite $l = 100^{\text{cm}}$, die Dicke $h = 1^{\text{cm}}$, so muss für die grösste Breite d die Gleichung gelten $100 \cdot 1 \cdot {}^1\!/_2\,d = 522$, mithin $d = 10{,}44^{\text{cm}}$. An den Enden verlangt die Sicherheit gegen Abscherung und die sichere Auflagerung eine kleine Abweichung von der ideellen Rautenform. Das Gewicht der federnden Platte beträgt etwa 4^{kg}. Die Masse derselben wurde bei der bisherigen Betrachtung gegenüber der Masse der Kugel vernachlässigt. Der dabei begangene Fehler kann erst auf Grund der Lehre vom Stosse (S. 146) beurtheilt werden. Ohne Rücksicht auf diesen Umstand würde man zu dem Schlusse kommen, dass die Federplatte beim Zurückschwingen die Kugel mit der Geschwindigkeit c wieder forttreiben werde; in Wirklichkeit fällt die Geschwindigkeit des Rücklaufs geringer aus.

c) Tragfedern der Fuhrwerke (Biegungsfedern).

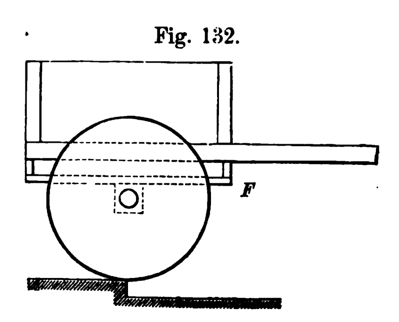
Die Federn, welche die Wagenkasten der Fuhrwerke tragen, haben den Zweck, die Erschütterungen zu vermindern, welche durch Unregelmässigkeiten der Fahrbahn verursacht werden. Fällt ein Fuhrwerk ohne Federn (Fig. 131), dessen Gewicht $= Q$ ist, in eine Vertiefung h, so muss die Arbeit der Schwere Qh beim Aufschlagen auf den Boden der Vertiefung durch die Arbeit des Widerstandes der Fahrbahn, sowie der lothrechten Kräfte, mit denen die einzelnen Theile des Fuhrwerks auf einander drücken, aufgehoben werden. Ist nun der Boden wenig nachgiebig, sind die Räder und das ganze Fuhrwerk sehr steif gebaut, so dass nur geringe Form-

Fig. 131.



änderungen entstehen, so werden jene Kräfte, deren Arbeit $= Q h$ sein muss, in Folge ihrer geringen Weglängen sehr gross. Daraus entsteht eine örtliche Zerstörung der Fahrbahn und eine starke Anspannung der tragenden Theile des Fuhrwerkes; auch wird durch den harten Aufschlag, d. h. die starke Verzögerung, welche auf die Fallbeschleunigung folgt, die Lockerung der Verbindungen (Schrauben), Nägel) erleichtert.

Fig. 132.

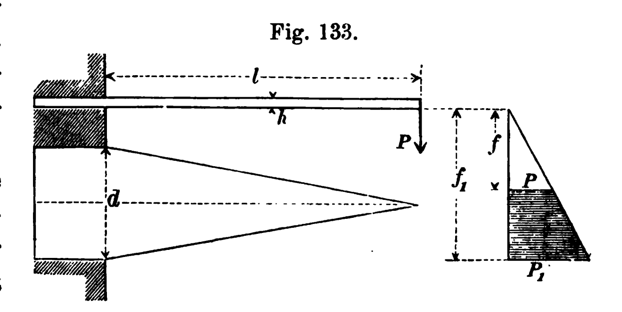


Wird zwischen Achse und Wagenkasten eine biegsame Feder F eingeschaltet (Fig. 132), so wird beim Hinunterfallen nur noch die (geringere) Masse der Räder und der Achse hart aufschlagen. Der Wagenkasten mit der Last wird dagegen längs einer grösseren Weglänge aufgefangen, weil die Feder nach dem Aufschlagen der Räder sich durchbiegt und durch ihre Biegungsarbeit die Arbeit der Schwere aufzehrt. In Folge der beträchtlichen Vergrösserung des lothrechten Weges des Wagenkastens nach dem Aufschlagen der Räder wird nun die Grösse der verzögernden Kraft so erheblich vermindert, dass an Stelle des zerstörenden, unangenehm fühlbaren und lärmenden Stofses eine sanfte lothrechte Schwingung entsteht. Gute Federn schonen also die Fahrbahn und das Fuhrwerk, sowie die Nerven der betheiligten Menschen. Die zuweilen benutzten Kautschuk-Reifen sind eine Fortsetzung dieser Bestrebungen, indem durch sie auch der Stofs der Räder und Achsen zu einem elastischen gemacht wird.

Die Tragfedern haben eine zweifache Aufgabe: sie müssen das Gewicht des Wagenkastens im Gleichgewichtszustande tragen, wobei sie eine Spannung σ erfahren, und müssen ferner im Stande sein, bei einer bis zur Elasticitätsgrenze wachsenden Spannung eine Arbeit zu leisten, welche die Stöfse, die durch die Unregelmäfsigkeiten der Fahrbahn ohne die Wirkung der Federn entstehen würden, in elastische Schwingungen umwandelt. Die Arbeit der Längenänderung, welche nach S. 120 eine günstige Ausnutzung des Stoffes erlauben würde, ist bei Stahlfedern nicht gut zu verwerthen, weil die Längenänderung zu gering ausfällt. Die Verkürzungsarbeit von Kautschuk-Blöcken hat man bei Strassenbahn-Fuhrwerken früher

benutzt, aber aus den S. 111 angeführten Gründen aufgeben müssen. Daher verwendet man die Biegungsarbeit des Stahles, bei der eine beträchtliche Formänderung möglich ist. Hierzu eignet sich nun nach S. 122 die Balkenform überall gleicher Höhe mit gleichmässig veränderlicher Breite, d. h. die Dreiecksfeder, besonders gut.

Fig. 133.



Eine solche Feder ist gewöhnlich in der Mitte unterstützt und an beiden Enden durch gleiche Lasten belastet; wegen der vollkommen symmetrischen Anordnung betrachten wir zunächst nur die eine Hälfte, die an dem einen Ende als wagerecht eingespannt betrachtet werden kann (Fig. 133). Für den Ruhezustand gilt

$$1) \qquad \sigma \cdot \frac{J}{e} = 2\sigma \cdot \frac{J}{h} = \sigma \frac{d \cdot h^2}{6} = Pl.$$

Mit der Ruhelast ist nach S. 51 eine Durchbiegung

$$2) \qquad f = \frac{Pl^3}{2EJ} = \frac{\sigma}{E}\frac{l^2}{h}$$

verbunden. Diese Gleichgewichts-Biegung f ist für spätere Arbeitsleistung nicht mehr zu verwerthen, denn sie entsteht ebenso wie die Spannung σ schon bei dem Aufbringen der Last. Nur der Spannungs-Spielraum von σ bis zur Elasticitätsgrenze z mit dem Arbeitswerthe $\frac{V}{6}\frac{z^2 - \sigma^2}{E}$ nach Gl. 8 S. 122 ist noch für die Vernichtung der Stöfse verfügbar. Dabei vergrössert sich die Biegung auf $f_1 = f \cdot z : \sigma$, der am Ende auftretende Biegungswiderstand auf $P_1 = P \cdot z : \sigma$. Die noch auszunutzende Biegungsarbeit

$$3) \qquad \frac{P_1 f_1 - Pf}{2} = \frac{V}{6}\frac{z^2 - \sigma^2}{E}$$

wird in der Fig. 133 rechts durch das schraffirte Trapez dargestellt.

Welchen Anforderungen die Feder zu genügen hat, ist vorwiegend durch die Erfahrung ermittelt worden, und diese hat man in der Weise zum Ausdrucke gebracht, dass eine einem bestimmten Zwecke angemessene Feder eine gewisse Länge l haben muss, unter der Ruhelast P nur bis zu einer gewissen Spannung σ beansprucht werden darf und dass mit der Ruhelast eine bestimmte Durchbiegung f verbunden sein muss. Die Werthe P und f bedingen dann nicht allein die Arbeit $\frac{1}{2} Pf$ bis zur Belastung mit P, sondern auch zugleich, weil man $z:\sigma$ kennt, die noch weiter verfügbare Arbeit (nach Gl. 3).

Man kümmert sich also bei der Berechnung der Feder nicht unmittelbar um die ihr zuzumuthende Arbeitsleistung, sondern bringt diese (zur Vereinfachung der Aufgabe) nur mittelbar durch die der Ruhelast entsprechende Biegung f zum Ausdrucke. Jedoch ist hiermit die Fähigkeit der Feder, die Last zu tragen und darüber hinaus noch Arbeit zu leisten, vollkommen gekennzeichnet.

Die Querschnitthöhe bestimmt sich aus Gl. 2 zu

4) $$h = \frac{\sigma}{E} \frac{l^2}{f},$$

die Breite hiernach aus Gl. 1 zu

5) $$d = \frac{6\,Pl}{\sigma h^2}.$$

Der Rauminhalt $V = \frac{1}{2} d \cdot h \cdot l$ ergiebt sich daher, wie es nach Gl. 8, S. 122, auch sein muss, zu $3\,Pf \frac{E}{\sigma^2}$.

Beispiel: Es seien gegeben:
$P = 1900$ kg; $f = 5$ cm; $\sigma = 4500$ at;
$E = 2\,500\,000$ at; $l = 60$ cm. Dann wird nach Gl. 4 und 5:

$$h = \frac{4500}{2\,500\,000} \frac{60^2}{5} = 1{,}3 \text{ cm};$$

$$d = \frac{6 \cdot 1900 \cdot 60}{4500 \cdot 1{,}69} = 90 \text{ cm};$$

Eine Feder von so grosser Breite d ist für die Anwendung nicht geeignet. Sie wird daher in solcher Weise umgestaltet, dass eine zusammengesetzte Feder von geringerer Breite entsteht, die aber die gleiche Tragfähigkeit und Biegsamkeit hat wie die soeben berechnete. Man theilt die Federplatte nach Fig. 134 in eine gerade Anzahl $2n$ (z. B. 8) parallele Streifen, vereinigt je

zwei mit gleichen Ziffern bezeichnete Theile zu einem Stück und legt die so erhaltenen Streifen nach Fig. 135 auf einander, wobei man zunächst über dem Ende jedes Streifens ein Klötzchen angebracht denkt, so dass die einzelnen Streifen nur dort Kräfte auf einander ausüben können. Diese Kräfte werden mit K_1, K_2, K_3 bezeichnet.

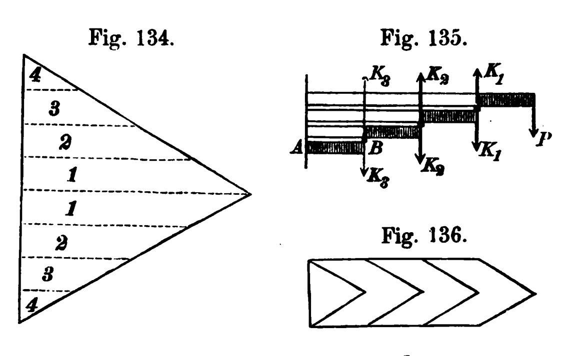
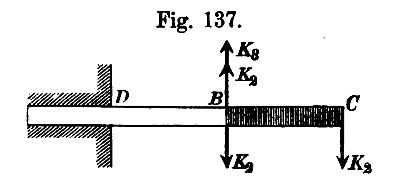


Fig. 136 zeigt die untere Ansicht der Feder, deren Breite $\frac{d}{n}$ beträgt. Die unterste Schicht AB von der Länge $\frac{l}{n}$ biegt sich bei B um

$$f_3 = \frac{K_3 \left(\frac{l}{n}\right)^3}{2E\frac{J}{n}}, \tag{6}$$

weil der Breite $^1/_n d$ ein Trägheitsmoment $^1/_n J$ entspricht. Die darüber liegende Schicht muss bei B die gleiche Durchbiegung f_3 zeigen, weil die zwischengelegten Klötzchen gleiche Biegung erzwingen. An dieser Schicht greift (Fig. 137) bei C die Kraft K_2, bei B die Kraft K_3 an. Fügt man in B zwei gleiche entgegengesetzte K_2 hinzu, so bilden die gegebene Kraft K_2 bei C und die bei B entgegengesetzt hinzugefügte ein Kräftepaar $\mathfrak{M} = K_2 \cdot {}^1/_n l$, welches dem von D bis B prismatischen Stabe nach



S. 47 bei B eine Biegung um $\frac{K_2 ({}^1/_n l)^3}{2E \cdot {}^1/_n J}$ ertheilt. Ausserdem wirkt bei B nach abwärts die Kraft $K_2 - K_3$, die nach S. 47 bei B eine Biegung $\frac{(K_2 - K_3)({}^1/_n l)^3}{3E \cdot {}^1/_n J}$ erzeugt. Setzt man die Summe beider Biegungen gleich f_3 (Gl. 6), so entsteht

$$\frac{K_2}{2} + \frac{K_2}{3} - \frac{K_3}{3} = \frac{K_3}{2}, \quad \text{d. h. } K_3 = K_2.$$

In gleicher Weise erhält man $K_2 = K_1$ und $K_1 = P$; d. h. die an den Klötzchen übertragenen Kräfte sind sämmtlich gleich der Last P. Die oberste Lage bildet (Fig. 138) einen Balken überall gleicher Sicherheit, dessen Spannung

$$\sigma = \frac{P \cdot {}^1/_n l e}{{}^1/_n J} = \frac{Ple}{J} = \frac{Plh}{2J}$$

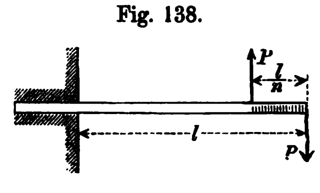
dieselbe ist, wie diejenige der Platte (s. Gl. 1, S. 125); sie biegt sich zufolge S. 52, Fig. 61 nach einem Kreisbogen vom Halbmesser

$$\rho = \frac{Eh}{2\sigma} = \frac{2\,500\,000 \cdot 1{,}3}{2 \cdot 4500} = 361\ ^{\text{cm}},$$

und die Durchbiegung des freien Endes beträgt

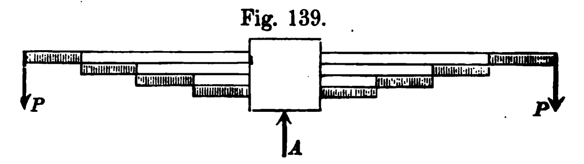
$$f = \frac{l^2}{2\rho} = \frac{\sigma}{E}\frac{l^2}{h}$$

Fig. 138.



wie bei der Platte (Gl. 2, S. 125). Von den übrigen Lagen gilt Ähnliches. Werden die Klötzchen auf die Höhe Null vermindert, so ändert sich in der Wirkung der Federlagen nichts Wesentliches. Setzt man diese Schichtenfeder an der gedachten Einspannungsstelle mit einer symmetrisch gestellten zusammen (Fig. 139), so entsteht eine an beiden Enden je mit P belastete Tragfeder, die sich bei A auf ein Achslager stützt. Dass man an den freien Enden geeignete Anordnungen trifft, um die Last P sicher auflagern zu können und dass man aus Zweckmässigkeitsgründen den einzelnen Lagen schon im spannungslosen Zustande eine Krümmung giebt, hat auf die Wirkung keinen erheblichen Einfluss.

Fig. 139.



Der Einfachheit wegen haben wir eine Feder von nur 4 Schichten dargestellt. In der Ausführung wählt man statt dessen vielleicht 10 Schichten von je 9 cm Breite.

Kommt in der Fahrbahn eine Vertiefung um h vor, in die das Rad hineinfällt und vermehrt sich dabei die Durchbiegung der Feder um $f_1 - f$, so verrichtet die Schwere eine Arbeit $P(h + f_1 - f)$. Wird hierbei die Feder bis zur Elasticitätsgrenze beansprucht, so ist nach Gl. 3 (S. 125):

$$P(h + f_1 - f) = {}^1/_2\,(P_1 f_1 - Pf).$$

Bei gutem Federstahl kann man die Elasticitätsgrenze etwa zu $z = 8000$ annehmen. Dann wird wegen $f = 5\ ^{\text{cm}}$:

$$f_1 = 5 \cdot \frac{8000}{4500} = 5 \cdot 1{,}78 = 8{,}9\ ^{\text{cm}};$$

$$P_1 = 1900 \cdot 1{,}78 = 3380\ ^{\text{kg}};\quad \text{somit}$$

$$h = \frac{P_1 f_1 - P(2f_1 - f)}{2P} = 1{,}5\ ^{\text{cm}}.$$

Um diese Höhe nur darf die Achse fallen, damit die Feder nicht über die Elasticitätsgrenze hinaus beansprucht werde. Bei holprigen Wegen muss man daher σ kleiner annehmen.

3. Verdrehungs-Arbeit.

Wirkt am freien Ende eines am anderen Ende befestigten Stabes von Cylinderform (Fig. 78, S. 68) ein von 0 bis $\mathfrak{M}$ stetig anwachsendes Verdrehungsmoment, entspricht dem Endwerthe $\mathfrak{M}$ ein Verdrehungswinkel ϑ, einem beliebigen Zwischenwerthe $\mathfrak{M}'$ der Verdrehungswinkel φ, so ist für eine Zunahme dieses Winkels um $d\varphi$ die Arbeit (nach 1. Theil, 2. Aufl., S. 225)

$$d\mathfrak{A} = \mathfrak{M}' d\varphi.$$

Weil nun nach S. 70, Gl. 4 $\mathfrak{M}'$ mit φ verhältnisgleich wächst, so wird wie in den früheren ähnlichen Fällen die Gesammtarbeit

1) $$\mathfrak{A} = {}^1\!/_2\, \mathfrak{M} \vartheta.$$

Setzt man die Werthe $\mathfrak{M}$ und ϑ aus Gl. 3 und 4, S. 69/70, ein nämlich

$$\mathfrak{M} = \frac{\tau J_0}{r} \quad \text{und} \quad \vartheta = \frac{\mathfrak{M}\, l}{G J_0},$$

wobei τ die stärkste Schubspannung bedeutet, so wird

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} \frac{J_0 l}{r^2}$$

oder, wenn man $J_0 = F i_0^2$ und $Fl = V$ setzt,

2) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{2} \frac{\tau^2}{G} \frac{i_0^2}{r^2}.$$

Da nun für kreisförmigen Querschnitt $i_0^2 = {}^1\!/_2\, r^2$, so entsteht

3) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{4} \frac{\tau^2}{G}.$$

Für rechteckigen Querschnitt von den Seiten b und h (mit $b \leqq h$) war (S. 74, Gl. 13)

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{9} \tau \cdot F \cdot b$$

und nach S. 76, Gl. 16

$$\vartheta = 0{,}8 \frac{\tau}{G} \frac{l}{b} \left(1 + \frac{b^2}{h^2}\right).$$

Daher wird

$$\mathfrak{A} = {}^1\!/_2\, \mathfrak{M} \vartheta \frac{0{,}8}{9} \frac{\tau^2}{G} Fl \left(1 + \frac{b^2}{h^2}\right) \quad \text{oder}$$

4) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{11} \frac{\tau^2}{G} \left(1 + \frac{b^2}{h^2}\right).$$

Im günstigsten Falle, für $b = h$, giebt dies

5) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{5{,}5}\frac{\tau^2}{G};$$

im ungünstigsten Falle aber, für $b:h = 0$:

6) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{11}\frac{\tau^2}{G}.$$

Um die Verdrehungs-Arbeit mit der Verlängerungs-Arbeit vergleichen zu können, bedenke man, dass nach S. 17 bei gleicher Sicherheit etwa $\tau = 0{,}8\,\sigma$ zu setzen, dass ferner $G = 0{,}4\,E$ ist, dann wird $\frac{\tau^2}{G} = 1{,}6\,\frac{\sigma^2}{E}$.

Für den Vollcylinder ergiebt sich nach Gl. 3

7) $$\mathfrak{A} = 0{,}4\,V\frac{\sigma^2}{E},$$

d. h. $^4/_5$ der Verlängerungs-Arbeit (vgl. S. 108, Gl. 5). Bei einem Hohlcylinder von geringer Wandstärke ist annähernd $i_0 = r$, daher (nach Gl. 2)

8) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{2}\frac{\tau^2}{G} = 0{,}8\,V\frac{\sigma^2}{E},$$

also noch erheblich günstiger als bei der Verlängerung. Die Drehungsarbeit eines Hohlcylinders ist hiernach die günstigste Art, unter der ein Stab Arbeit aufzunehmen vermag.

Verdrehungs-Federn.

Gerade Verdrehungsfedern werden wohl als Thürschliesser an eisernen Pforten benutzt. Wählt man einen Stahlstab mit quadratischem Querschnitte von $b = 0{,}4^{\text{cm}}$ Seite und $l = 120^{\text{cm}}$ Länge, so erträgt derselbe bei einer zulässigen Schubspannung $\tau = 3600^{\text{at}}$ ein Drehmoment (nach S. 74, Gl. 13)

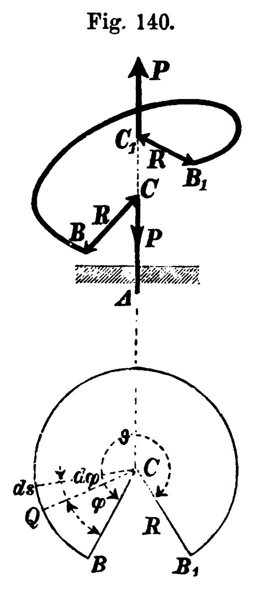
$$\mathfrak{M} = \frac{2}{9}\cdot 3600\cdot 0{,}4^3 = 51^{\text{cmkg}},$$

welches, wenn die Thürklinke 50^{cm} von der Drehachse entfernt ist, durch einen Kraftaufwand von $51:50 =$ rund 1^{kg} zum Öffnen der Pforte überwunden wird. Der Winkel ϑ, um den die Thür gedreht werden darf, beträgt nach S. 129 mit $G = 0{,}4\,E = 880000^{\text{at}}$

$$\vartheta = \frac{0{,}8\cdot 3600}{880000}\cdot 300\cdot 2 = \text{rund } 2,\quad \text{d. h,}\quad \frac{2\cdot 180}{\pi} = 115 \text{ Grad,}$$

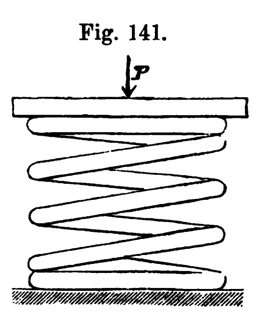
Gewundene Verdrehungsfedern dienen in feiner Ausführung als Federwagen, in grösserem Maſsstabe als Tragfedern bei Strassenbahn-Fuhrwerken und als Bufferfedern bei Eisenbahn-Fuhrwerken. Fig. 140 stellt in Ansicht und Grundriss einen nach einem Kreise vom Halbmesser R gekrümmten Stab dar, der bei A fest eingespannt, bei B und B_1 je mit einem nach dem Mittelpunkte führenden steifen Arme von der Länge R versehen ist; an den Enden dieser beiden Arme wirke je eine rechtwinklig zur Ebene des Kreises stehende Kraft P. Die Kraft P übt dann auf alle Querschnitte des gewundenen Stabstücks ein Verdrehungsmoment PR aus und erzeugt an einem Bogentheilchen ds einen Verdrehungswinkel $d\vartheta$, der aus Gl. 4, S. 70, bezw. Gl. 16, S. 76, folgt, wenn man l mit ds vertauscht. Bei einem Mittelpunktswinkel α des Ringes hat man l mit $R\alpha$ zu vertauschen, um den gesammten Verdrehungswinkel ϑ zu erhalten, und $R\vartheta$ ist dann angenähert die Verschiebung $CC_1 = f$ des Angriffspunktes der Kraft P, solange es sich um kleine ϑ handelt, da dann auch die Verbiegung der Arme BC und B_1C_1 vernachlässigt werden darf.

Fig. 140.



Bei einer **cylindrischen Schraubenfeder** von n frei liegenden Windungen (Fig. 141) hat man entsprechend l mit $2n\pi R$ zu vertauschen. Hiernach gilt für eine Feder, deren Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r, nach S. 129:

Fig. 141.



9) $$\mathfrak{M} = PR = \frac{\tau J_0}{r} = \frac{\tau r^3 \pi}{2}, \quad \text{und damit}$$

10) $$f = R\vartheta = \frac{P \cdot 2n\pi R^3}{GJ_0} = P\frac{4nR^3}{Gr^4} = \frac{\tau}{G} 2n\pi\frac{R^2}{r}.$$

Bei der Benutzung solcher Federn zu Waagen und Kraftmessern bedingt die Verhältnis-Gleichheit von f und P eine gleichmässige Theilung.

Für eine Feder von rechteckigem Querschnitt $b \cdot h$ ist nach Gl. 13 und 16, S. 73 und 76

11) $$\mathfrak{M} = PR = \frac{2}{9} \tau h b^2;$$

12) $$f = R\vartheta = 1{,}6 \frac{\tau}{G} \frac{n \pi R^2}{b} \left(1 + \frac{b^2}{h^2}\right).$$

Eine **kegelförmige Schraubenfeder** (Fig. 142) bildet im Grundrisse eine Spirale. Für einen Punkt Q im Abstande ϱ von der Achse ist das Moment $P\varrho$, wechselnd von PR_1 bis PR_2. Ein Bogentheilchen ds giebt einen Verdrehungswinkel

$$\frac{\vartheta}{l} ds = \frac{\vartheta}{l} \varrho \cdot d\varphi$$

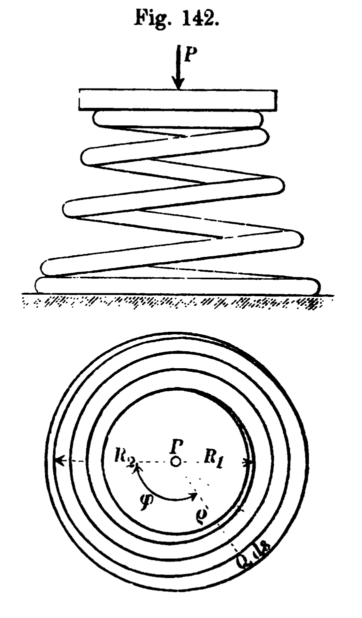


Fig. 142.

(wenn ϑ der Verdrehungswinkel für eine Länge l ist) und eine Verschiebung des Angriffspunktes von P um

$$df = \varrho \frac{\vartheta}{l} \varrho \cdot d\varphi.$$

Die Gesammtverschiebung ist also

$$f = \frac{1}{l} \int_0^{2n\pi} \vartheta \varrho^2 \cdot d\varphi.$$

Man kann annehmen, dass ϱ sich nach einem Geradlinien-Gesetz ändert, d. h.

$$\frac{R_2 - \varrho}{R_2 - R_1} = \frac{\varphi}{2 n \pi} \quad \text{also} \quad \varrho = R_2 - \frac{R_2 - R_1}{2 n \pi} \varphi, \quad \text{so dass}$$

$$d\varrho = -\frac{R_2 - R_1}{2 n \pi} d\varphi \quad \text{oder}$$

$$d\varphi = -\frac{2 n \pi}{R_2 - R_1} d\varrho.$$

Für eine Feder von **kreisförmigem** Querschnitte (Halbmesser r) gilt für die stärkste Spannung τ die Gleichung

13) $$\tau_{max} = \frac{2\,P \cdot R_2}{r^3 \pi}.$$

Ferner ist nach S. 70, Gl. 4:

$$\vartheta = \frac{P\varrho}{G J_0} l, \quad \text{daher}$$

$$f = -\frac{P}{G J_0} \frac{2 n \pi}{R_2 - R_1} \int_{R_2}^{R_1} \varrho^3 d\varrho = \frac{P n \pi (R_2^4 - R_1^4)}{2 G J_0 (R_2 - R_1)}$$

14) $$f = \frac{P n \pi}{2 G J_0} (R_2^2 + R_1^2)(R_2 + R_1).$$

Für eine Feder von **rechteckigem** Querschnitte ($b \cdot h$ mit $b \leqq h$) gilt für die stärkste Spannung τ die Gl. 14, S. 74, mit

15) $$P R_2 = \frac{8}{3} \tau \frac{J_2}{b}, \quad \text{daher } \tau_{max} = \frac{3}{8} \cdot \frac{P \cdot R_2 \cdot b}{J^2},$$

und für die Verschiebung erhält man, wenn ϑ aus Gl. 15, S. 75 mit 0,3 statt $\frac{3}{8}$ eingesetzt wird,

16) $$f = 0{,}15 \frac{P n \pi}{G} \left(\frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_1}\right)\left(R_2^2 + R_1^2\right)\left(R_2 + R_1\right).$$

Derartige Federn (Wickelfedern) sind als Bufferfedern der Eisenbahnwagen gebräuchlich.

Beispiel: Für die cylindrische Schrauben-Tragfeder eines Strassenbahnwagens sei $R = 8^{cm}$, der Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser $r = 1^{cm}$, die zulässige Schubspannung $\tau = 3600^{at}$; $G = 1\,000\,000^{at}$; $n = 8$. Dann ist die zulässige Belastung nach Gl. 9

$$P = \frac{3600 \cdot 1 \cdot \pi}{2 \cdot 8} = 707^{kg},$$

die entsprechende Zusammendrückung nach Gl. 10

$$f = \frac{3600}{1\,000\,000} 2 \cdot 8 \cdot \pi \cdot 64 = 11{,}6^{cm}.$$

Die denkbar leichteste Metallfeder würde eine aus einer dünnwandigen Röhre gewundene cylindrische Schraubenfeder sein.

Weiteres über Berechnung der Federn giebt z. B. Kirsch in Ztschr. d. Ver dtsch. Ing. 1898, S. 429.

Schlussbemerkung: Bei sämmtlichen vorstehenden Untersuchungen über Formänderungs-Arbeit und ihre Anwendung wurde

die Masse des elastischen Körpers vernachlässigt. Auf Grund dieser Vernachlässigung war es zulässig, die für eine langsam stetige Formänderung hergeleitete Arbeit auch auf Fälle anzuwenden, bei denen die Formänderung mit einer gewissen Plötzlichkeit erfolgt. Die Berücksichtigung der Masse des elastischen Körpers und der Beschleunigung seiner einzelnen Theile erschwert die Lösung derartiger Aufgaben in solchem Grade, dass man sich für die meisten Fälle der vorstehend entwickelten Gleichungen bedienen wird; jedoch darf man nicht übersehen, dass das Ergebnis der Rechnung nur annähernd richtig sein kann.

Eine plötzliche Belastung, jedoch ohne Stofs, hat stets Schwingungen zur Folge, bei denen die stärkste Spannung das Doppelte der Gleichgewichts-Spannung beträgt. Dieses Ergebnis findet auch Anwendung auf die verschiedenen Fälle der Beschleunigungs-Zustände elastischer Körper. Auf S. 97 wurde ausdrücklich vorausgesetzt, dass sämmtliche Theile des Körpers übereinstimmende Bewegung haben. Der Körper befindet sich dann in scheinbarer Ruhe in Bezug auf einen Raum, der dieselbe Bewegung ausführt. War der Körper vorher spannungslos und treten die Kräfte, die den Beschleunigungszustand herbeiführen, plötzlich auf, so wird nur der Schwerpunkt des Körpers diejenige Beschleunigung p haben, welche S. 97 u. ff. für seine sämmtlichen Theile vorausgesetzt war. Die einzelnen Theile aber werden um die scheinbare Gleichgewichtslage Schwingungen ausführen, bei denen die Spannungen auf das Doppelte der auf S. 97 u. ff. berechneten Werthe anwachsen können.

Da die Formänderungen elastisch-fester Körper innerhalb der Elasticitätsgrenze den Belastungen verhältnisgleich sind, so kann die Messung der Formänderung zur Bestimmung der Belastung benutzt werden. Aus diesem Grunde finden Biegungs- und Verdrehungsfedern ausgedehnte Anwendung bei Kraft- und Gewichtsmessern (Federwaagen, Federmanometer, Dynamometer u. dgl.).

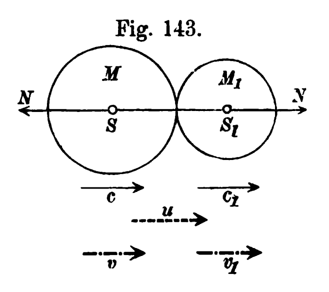
D. Stofs elastisch-fester Körper.

Treten zwei Körper während der Bewegung mit einander in Berührung und haben sie an der Berührungsstelle verschiedene Geschwindigkeit, so werden sie im Allgemeinen gegenseitig auf ihre Bewegung einwirken, d. h. gegenseitige Kräfte auf einander ausüben. Die hiermit zusammenhängenden Bewegungs-Erscheinungen nennt man Stofs. Die Richtungslinie des gegenseitigen Normaldrucks zwischen den Körpern heisst die Stofslinie. Geht die Stofslinie durch die Schwerpunkte beider Körper, so heisst der Stofs central, sonst excentrisch. Bewegen sich beide Körper rein fortschreitend, u. zw. in der Richtung der Stofslinie, so heisst der Stofs ein gerader.

I. Gerader centraler Stofs.

Der stofsende Körper habe die Masse M und im Augenblicke des Zusammentreffens die Geschwindigkeit c, der getroffene Körper von der Masse M_1 die kleinere Geschwindigkeit c_1 (Fig. 143). Die Körper üben nun an der Berührungsstelle gegenseitige gleiche Normalkräfte N auf einander aus und drücken sich gegenseitig zusammen, bis der Abstand der Schwerpunkte S und S_1 beider Körper den kleinsten Werth erreicht hat. Bis zu diesem Augenblicke hat sich die Kraft N, von Null beginnend, stetig vergrössert. Diese Erscheinungen bilden den ersten Abschnitt der Stofsdauer. Darnach erfolgt dann im zweiten Abschnitte des Stofses eine Wiederausdehnung der Körper, wobei die Schwerpunkte sich wieder von einander entfernen. In dem Augenblicke der stärksten Formänderung, welcher zwischen beiden Abschnitten des Stofses liegt, haben die Schwerpunkte aufgehört, sich zu nähern und beginnen, sich von einander zu entfernen. In diesem Zeitpunkt ist also die scheinbare (relative) Geschwindigkeit der beiden Schwerpunkte gegen einander

Fig. 143.



Null, d. h. beide haben eine gemeinsame Geschwindigkeit u. Im zweiten Abschnitte wirkt die Kraft im Allgemeinen noch fort, verzögert M noch weiter bis auf die Geschwindigkeit v und beschleunigt gleichzeitig M_1 bis zur Geschwindigkeit v_1. Mit dem Eintritte dieser Geschwindigkeiten mag die gegenseitige Einwirkung (N) aufhören und damit auch der Stofs beendet sein.

Es kommt darauf an, aus den Geschwindigkeiten c und c_1 **vor** dem Stofse die Geschwindigkeiten v und v_1 **nach** dem Stofse zu ermitteln.

In den Figuren sind die Geschwindigkeiten vor dem Stofse mit vollen Linien, die Geschwindigkeiten im Augenblicke der stärksten Formänderung gestrichelt, die Geschwindigkeiten nach dem Stofse strichpunktirt gezeichnet.

Sehr einfach ist die Bestimmung der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit u im Augenblicke der stärksten Formänderung. Die Verzögerung p des Schwerpunktes der stofsenden Masse M und die Beschleunigung p_1 des Schwerpunktes der gestofsenen Masse M_1 sind $p = \frac{N}{M}$; $p_1 = \frac{N}{M_1}$, ihr Verhältnis

$$1)\qquad p : p_1 = M_1 : M$$

d. h. umgekehrt wie die Massen. Die Geschwindigkeits-Änderungen von S bezw. S_1 während eines Zeittheilchens sind $p \cdot dt$ und $p_1\, dt$ und stehen in demselben Verhältnisse $M_1 : M$. Da dieses Verhältnis ganz unabhängig von der (sehr veränderlichen Grösse der Kraft N ist, so müssen in demselben unveränderlichen Verhältnis auch die Geschwindigkeits-Änderungen der beiden Massen für jeden beliebigen Theil des Stofses, sowie auch für die ganze Stofsdauer stehen. Daher für den ersten Abschnitt des Stofses:

$$2)\qquad \frac{c - u}{u - c_1} = \frac{M_1}{M};$$

für den zweiten Abschnitt:

$$3)\qquad \frac{u - v}{v_1 - u} = \frac{M_1}{M};$$

für den ganzen Stofs:

$$4)\qquad \frac{c - v}{v_1 - c_1} = \frac{M_1}{M}.$$

Aus Gl. 2 findet man leicht die Unbekannte

5) $$u = \frac{Mc + M_1 c_1}{M + M_1}.$$

Hieraus ergeben sich die Geschwindigkeits-Änderungen der beiden Massen im ersten Abschnitte des Stofses, wenn man in $c - u$ und $u - c_1$ den Werth von u nach Gl. 5 einsetzt und möglichst zusammenzieht, zu

6) $$c - u = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1}} \quad \text{und}$$

7) $$u - c_1 = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M_1}{M}}.$$

Diese Vorgänge im ersten Abschnitte des Stofses sind von der Beschaffenheit der Körper und von der Heftigkeit des Stofses ganz unabhängig. Anders ist es mit den Vorgängen im zweiten Abschnitte; diese lassen sich nicht mehr mit gleicher Schärfe bestimmen, da sie wesentlich von dem Grade des elastischen Verhaltens der Körper abhängig sind, zu dessen Kennzeichnung eine Erfahrungsgröfse eingeführt werden muss. Die Geschwindigkeits-Änderung $u - v$ der Masse M während des zweiten Abschnittes werde nämlich auf die Geschwindigkeits-Änderung $c - u$ derselben Masse im ersten Abschnitte bezogen durch die Festsetzung

$$u - v = k\,(c - u).$$

Dieses selbe Verhältnis gilt dann wegen Gl. 2 u. 3 auch für die Masse M_1, d. h.

$$v_1 - u = k\,(u - c_1).$$

Die Verhältniszahl k heisst der Koëfficient der Stofs-Elasticität, wofür wir kürzer **Stofsziffer** sagen. Wenn die Geschwindigkeits-Abnahme der Masse M im zweiten Abschnitte k mal so gross ist wie im ersten, so muss sie während **beider** Abschnitte das $(1 + k)$ fache derjenigen des ersten Abschnittes betragen, daher

8) $$c - v = (c - u)(1 + k)$$

und ebenso die Geschwindigkeits-Zunahme von M_1:

9) $$v_1 - c_1 = (u - c_1)(1 + k),$$

oder mit Hülfe der Gl. 6 u. 7:

10) $$c - v = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1}} (1 + k).$$

11) $$v_1 - c_1 = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M_1}{M}} (1 + k).$$

$c - c_1$ ist der Geschwindigkeits-Unterschied der beiden Massen beim Zusammentreffen; wir wollen ihn kurz die Stofsgeschwindigkeit nennen. Von dieser ist die Heftigkeit des Stofses abhängig. Die Nenner in Gl. 10 u. 11 haben die Form 1 + Verhältnis der beiden Massen, wobei diejenige Masse zuerst geschrieben wird, um deren Geschwindigkeit es sich gerade handelt.

Für die Grösse k ergiebt sich noch eine andere Bedeutung, wenn man die Gl. 8 u. 9 zusammenzählt; es entsteht dann

$$c - v + v_1 - c_1 = (c - c_1)(1 + k) \quad \text{oder}$$

$$v_1 - v = (c - c_1) k, \quad \text{daher ist}$$

12) $$k = \frac{v_1 - v}{c - c_1} = \frac{\text{Geschwindigkeits-Unterschied nach dem Stofse}}{\text{Geschwindigkeits-Unterschied vor dem Stofse}}.$$

Vergleicht man das gesammte Arbeitsvermögen beider Massen vor dem Stofse mit demjenigen nach dem Stofse, so ergiebt sich im Allgemeinen ein Unterschied, der sogen. äussere Arbeitsverlust $\mathfrak{A}_v$; es ist

$$\mathfrak{A}_v = {}^1/_2 (Mc^2 + M_1 c_1^2 - Mv^2 - M_1 v_1^2)$$

oder anders geordnet

$$2\mathfrak{A}_v = M(c^2 - v^2) - M_1 (v_1^2 - c_1^2)$$

$$= M(c - v)(c + v) - M_1 (v_1 - c_1)(v_1 + c_1).$$

Weil nun nach Gl. 4: $M_1 (v_1 - c_1) = M(c - v)$ ist, so wird auch

$$2\mathfrak{A}_v = M(c - v)\left\{c + v - (v_1 + c_1)\right\} = M(c - v)\left\{c - c_1 - (v_1 - v)\right\}.$$

Setzt man hierin die Beziehung $v_1 - v = (c - c_1) k$ (Gl. 12) ein, so wird $2\mathfrak{A}_v = M(c - v)(c - c_1)(1 - k)$, und es entsteht schliesslich, wenn man noch nach Gl. 10 $c - v$ auf $c - c_1$ zurückführt:

$$\mathfrak{A}_v = \frac{M}{2}\frac{(c-c_1)^2}{1+\frac{M}{M_1}}(1-k^2) \quad \text{oder}$$

13) $$\mathfrak{A}_v = \frac{M M_1}{M+M_1}\frac{(c-c_1)^2}{2}(1-k^2).$$

a) Festsetzung der Stofsziffer k.

1) Verhalten sich die Körper beim Stofse vollkommen elastisch, so werden sie nach Beendigung des Stofses keine bleibende Formänderung zeigen. Die negative Arbeit der inneren Spannkräfte bei der Zusammendrückung wird dann durch die positive Arbeit bei der Rückkehr in den spannungslosen Zustand vollständig aufgehoben. Da nun, wenn man beide Massen als eine Gruppe auffasst, N eine innere Kraft ist und äussere Kräfte nicht vorhanden sind, so muss das Arbeitsvermögen nach dem Stofse dieselbe Grösse haben wie vor dem Stofse. Es bedingt dies, dass in Gl. 13) $1 - k^2 = 0$, mithin $k = 1$ werde. Beim vollkommen elastischen Stofs ist also die Stofsziffer $k = 1$. Ein Arbeitsverlust tritt nicht ein.

2) Der Gegensatz hierzu ist, dass die Körper beim Stofse sich gar nicht elastisch, sondern vielmehr vollkommen bildsam oder plastisch verhalten, dass sie nach dem Eintreten der stärksten Formänderung gar kein Bestreben haben, zur ursprünglichen Form zurückzukehren. In diesem Falle kommt der zweite Abschnitt des Stofses gar nicht zu Stande; es ist sonach $k = 0$; die Geschwindigkeiten v und v_1 werden beide $= u$, d. h. die beiden Körper gehen nach dem Stofse mit gleicher Geschwindigkeit u weiter. In diesem Falle besteht die Arbeitsverrichtung nur in der negativen Zusammendrückungs-Arbeit, die den Verlust an Arbeitsvermögen hervorruft:

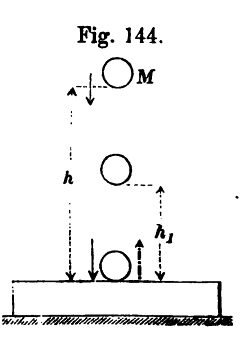
14) $$\mathfrak{A}_v = \frac{M M_1}{M+M_1}\frac{(c-c_1)^2}{2};$$

man erhält diesen Werth, indem man in Gl. 13 $k = 0$ setzt. Also: beim vollkommen unelastischen Stofs ist die Stofsziffer $k = 0$.

3) Streng genommen giebt es weder einen vollkommen elastischen, noch einen vollkommen unelastischen Stofs; vielmehr sind die wirklichen Stöfse **unvollkommen elastisch**, und es liegt k zwischen 0 und 1. Ob ein Stofs mehr oder weniger elastisch ausfällt, hängt nicht allein von der Beschaffenheit der Körper ab, sondern auch von der Heftigkeit des Stofses, von der Stofsgeschwindigkeit $c - c_1$. Die Stofsziffer nähert sich um so mehr der Einheit, je elastischer die Körper sind (Elfenbein, Glas, Kautschuk) und je geringer die Heftigkeit des Stofses ist; sie nähert sich um so mehr der Null, je bildsamer die Körper sind (Wachs, Blei, ungebrannter Thon) und je heftiger der Stofs erfolgt.

Für einen gegebenen Fall kann man die Stofsziffer k durch Versuche ermitteln. Auf einen festen Boden (Fig. 144) legt man eine Platte aus bestimmtem Stoffe, lässt eine Kugel M von ebenfalls bestimmtem Stoffe aus einer Höhe h herabfallen und beobachtet, bis zu welcher Höhe h_1 sie wieder emporspringt. Um auf diesen Fall die Gl. 10 und 11 anwenden zu können, muss man zunächst beachten, dass die in diese Gleichungen einzuführende Masse M_1 nicht gleich der Masse der Platte ist, dass vielmehr die Platte, weil sie auf dem unnachgiebigen Erdboden gelagert ist, für den Stofs gewissermassen mit der ganzen Erde zusammen eine Masse M_1 bildet, so dass $M_1 : M = \infty$ oder $M : M_1 = 0$ zu setzen ist In allen Fällen, wo ein durch einen Stofs getroffener Körper in irgend einer Weise unbeweglich gemacht ist, kommt dieser Umstand dadurch zum Ausdrucke, dass man $M : M_1 = 0$ setzt, weil nur hierdurch in Gl. 11 die Geschwindigkeits-Änderung $v_1 - c_1$ zu Null gemacht wird.

Fig. 144.



Da die Platte die Geschwindigkeit $c_1 = 0$ hatte, so wird (Gl. 10)

$$c - v = c(1 + k) = c + ck,$$

also $v = - ck$. Nun ist $c = \sqrt{2gh}$; das negative Zeichen von ck bedeutet, dass die Geschwindigkeit nach dem Stofse aufwärts gerichtet ist. Es wird v gemessen durch die Steighöhe

$$h_1 = \frac{v^2}{2g} = k^2 \frac{c^2}{2g} = k^2 h,$$

mithin ist

15) $$k = \sqrt{\frac{h_1}{h}}.$$

Für vollkommen elastischen Stofs müsste $h_1 = h$ werden; für $k = 0$ wird $h_1 = 0$. Die Ergebnisse eines solchen Versuches können natürlich nur auf solche Fälle angewandt werden, wo dieselben Stoffe vorliegen wie beim Versuch und auch die Stofsgeschwindigkeit $c - c_1$ etwa $= \sqrt{2gh}$ ist. Der Luftwiderstand ist für kleine c zu vernachlässigen.

Für Geschwindigkeiten, wie sie auf dem Billard vorkommen, ist bei Elfenbein $k = {}^8/_9$. Für geringe Geschwindigkeiten ist bei Glas $k = {}^{15}/_{16}$, für Stahl und Kork ${}^5/_9$. Für Holz ist bei etwa $0{,}4^m$ Fallhöhe $k = {}^1/_2$.

b) Unelastischer Stofs.

Für $k = 0$ haben beide Körper nach dem Stofse die gemeinschaftliche Geschwindigkeit

16) $$v = v_1 = u = \frac{Mc + M_1 c_1}{M + M_1}$$

und einen Verlust an Arbeitsvermögen (Gl. 13, S. 139)

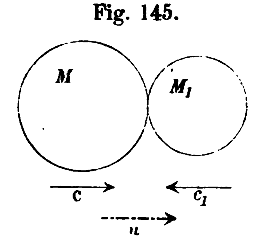
17) $$\mathfrak{A}_v = \frac{M M_1}{M + M_1} \frac{(c - c_1)^2}{2}.$$

Bewegen sich die beiden Körper gegen einander (Fig. 145), so vertausche man c_1 mit $- c_1$; dann wird

18) $$v = v_1 = u = \frac{Mc - M_1 c_1}{M + M_1} \quad \text{und}$$

19) $$\mathfrak{A}_v = \frac{M M_1}{M + M_1} \frac{(c + c_1)^2}{2}.$$

Fig. 145.



Sind noch beide Massen und deren Geschwindigkeiten einander gleich, so wird $v = v_1 = 0$ und

20) $$\mathfrak{A}_v = \frac{M}{2} \frac{4c^2}{2} = 2 \frac{Mc^2}{2},$$

d. h. in diesem Falle geht das gesammte durch die Geschwindigkeiten der Körper bedingte Arbeitsvermögen für die äussere Bewegung verloren. Freilich verschwindet das Arbeitsvermögen nicht spurlos, vielmehr wird es zum grössten Theile, wie die Arbeitsverluste durch Reibung (1. Theil, 2. Aufl., S. 269) in Wärme, zum kleineren Theil in Schallschwingungen umgewandelt.

c) Anwendung des Stofses; Einrammen von Pfählen.

Da die Geschwindigkeits-Änderungen beim Stofse sehr schnell erfolgen, so wird die entsprechende Kraft N häufig sehr gross. Die technische Verwendung des Stofses hat meist den Zweck, mit vergleichsweise einfachen Mitteln grosse Kräfte auszuüben, z. B. beim Eintreiben von Nägeln und Pfählen, beim Schmieden u. dgl. Man könnte ja einen Nagel auch durch Belastung ins Holz eindrücken; jedoch wäre dies zu umständlich und daher unzweckmässig; die zum Eindrücken erforderliche Kraft lässt sich mittels eines Hammerschlages in einfachster Weise hervorbringen.

Beim Eintreiben von Nägeln und dem Einrammen von Pfählen sind die Verhältnisse so beschaffen, dass man den Stofs als annähernd unelastisch ($k = 0$) annehmen kann. Auch hat der getroffene Körper M_1 vor dem Stofse die Geschwindigkeit $c_1 = 0$; daher wird

21) $$v = v_1 = u = \frac{Mc}{M + M_1},$$

der Verlust an (äusserem) Arbeitsvermögen

22) $$\mathfrak{A}_v = \frac{MM_1}{M + M_1}\frac{c^2}{2} = \frac{Mc^2}{2}\cdot\frac{1}{1 + \frac{M}{M_1}}.$$

Bei letzterer Schreibweise von $\mathfrak{A}_v$ ist $^1/_2 Mc^2$ das vor dem Stofse vorhandene Arbeitsvermögen; der zugehörige Faktor ist die Verhältniszahl, welche angiebt, der wievielte Theil des ursprünglichen Arbeitsvermögens verloren geht. Während der sehr kurzen Stofsdauer erfolgt noch keine erhebliche Bewegung der Masse M_1; nach dem Stofse aber gehen die Massen M und M_1 mit der gemeinsamen Geschwindigkeit u weiter; der ihnen verbliebene Rest an äusserem Arbeitsvermögen

23) $$\mathfrak{A}_1 = \frac{Mc^2}{2} - \mathfrak{A}_v = \frac{Mc^2}{2}\cdot\frac{1}{1 + \frac{M_1}{M}}$$

wird nun dazu verwendet, den Widerstand W, der sich dem Eindringen des Nagels oder Pfahles entgegensetzt, längs eines Weges s, der Eindringungstiefe, zu überwinden. Hiernach ist $\mathfrak{A}_1$ gewissermassen die Nutzarbeit des Stosses, während $^1/_2 Mc^2$ durch Arbeits-

aufwand erzeugt werden musste. Man kann daher bei Stöfsen, die das Eintreiben eines Nagels oder Pfahles zum Zwecke haben, $\mathfrak{A}_1 : (\frac{1}{2} M c^2)$ den **Wirkungsgrad** des Stofses

24) $$\eta_1 = \frac{1}{1 + \frac{M_1}{M}}$$

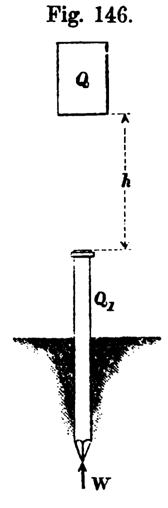
nennen. Dieser wird um so grösser, je kleiner $M_1 : M$, oder je grösser $M : M_1$ ist. Es muss daher der **treibende Körper möglichst schwer im Verhältnisse zum getriebenen Körper sein.** Würde der Hammer nur ebenso schwer sein wie der einzutreibende Nagel, so wäre η_1 nur 0,5, d. h. von der zum Hammerschlag aufgewandten Muskelarbeit würde nur die Hälfte nutzbar, während die andere Hälfte in schädlicher Weise unter Erzeugung von Wärme und Schall dem Nagelkopfe bleibende Formänderungen ertheilen würde.

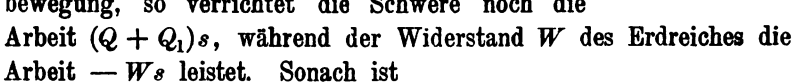
Beim **Pfahlrammen** lässt man einen Rammklotz vom Gewicht $Q = Mg$ aus einer Höhe h auf den Kopf des Pfahles vom Gewichte $Q_1 = M_1 g$ herabfallen (Fig. 146). Die zu je einem Heben des Rammklotzes aufgewandte Arbeit Qh setzt sich beim Fallen in äusseres Arbeitsvermögen $\frac{1}{2} M c^2$ um; davon geht der Theil $\mathfrak{A}_v$ für den Zweck verloren; mit dem Reste, der nach Gl. 21 beträgt

$$\mathfrak{A}_1 = Qh \cdot \frac{1}{1 + \frac{Q_1}{Q}},$$

werden beide Körper nach dem Stofse sich abwärts bewegen. Ist s die Weglänge dieser Weiterbewegung, so verrichtet die Schwere noch die Arbeit $(Q + Q_1)s$, während der Widerstand W des Erdreiches die Arbeit $-Ws$ leistet. Sonach ist

Fig. 146.





25) $$Ws = (Q + Q_1)s + Qh \frac{1}{1 + \frac{Q_1}{Q}}.$$

Hieraus kann man W berechnen, wenn s beobachtet wurde.

Beispiel: Ist $Q = 1200$ kg, $Q_1 = 600$ kg, $h = 80$ cm und $s = 0{,}5$ cm, so wird

$$W \cdot 0{,}5 = 1800 \cdot 0{,}5 + \frac{1200 \cdot 80}{1{,}5}$$
$$= 900 + 64\,000, \quad \text{daher}$$
$$W = 129\,800 \text{ kg}.$$

Das Glied $(Q + Q_1)s$ hat so unbedeutenden Einfluss, dass man genau genug

26) $$Ws = Qh \frac{1}{1 + \frac{Q_1}{Q}} \quad \text{setzen kann, also}$$

$$W = 128\,000 \text{ kg}.$$

Bis zu diesem Werthe dürfte die Belastung des Pfahles steigen, ohne dass der Pfahl einsänke. Da aber vorstehende Rechnung ziemlich roh ist, erfahrungsmässig auch der Widerstand des Erdreiches mit der Zeit abnimmt, so wählt man, um sicher zu gehen, als zulässige Belastung nur etwa $^1/_{18}$ des nach Gl. 26 berechneten Werthes von W, d. h. rund 7000 kg.

Berücksichtigung der Elasticität des Pfahles. Nach den Gleichungen 25 und 26 würde jeder Schlag von noch so geringer Fallhöhe h eine gewisse, wenn auch kleine Eindringungstiefe s des Pfahles zur Folge haben, da erst für $h = 0$ auch $s = 0$ wird. Dies trifft aber in Wirklichkeit nicht zu. Bis zu einem gewissen Grenzwerthe h_0 der Fallhöhe des Rammklotzes entsteht gar keine Eindringung des Pfahles, sondern er wird nur elastisch zusammengepresst, worauf er sich dann wieder ausdehnt. Soll sich nämlich der Pfahl vom Querschnitt F und der Länge l durch Einwirkung von oben unter Überwindung des Widerstandes W abwärts bewegen, so muss an dem unteren Ende des Pfahles eine Spannung $\sigma = W : F$ hervorgebracht sein, und man kann mit einiger Wahrscheinlichkeit annehmen, dass nahezu der ganze Pfahl auf diese Spannung gebracht werden muss, bevor er einsinken wird (Fig. 147). Dazu ist aber nach S. 108 eine Arbeit $\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E}$ erforderlich. Diese muss man von dem Arbeitsvermögen des Pfahles und des Rammklotzes abziehen, und erst der Rest ist $= Ws$ zu setzen. Mithin wird, weil $V = Fl$,

Fig. 147.

27) $$Ws = \frac{Qh}{1 + \frac{Q_1}{Q}} - \frac{W^2 l}{2EF}.$$

Die unwirksame Fallhöhe h_0 erhält man, wenn man $s=0$ und $h=h_0$ setzt, d. h.

28) $$\frac{Q h_0}{1+\frac{Q_1}{Q}}=\frac{W^2 l}{2 E F}.$$

Von der Höhe h wird also nur $h-h_0$ wirksam. Dieser Einfluss wird besonders bei langen Pfählen bedeutend.

Beispiel: Ist wiederum $Q=1200^{\text{kg}}$, $Q_1=600^{\text{kg}}$, $h=80^{\text{cm}}$, Pfahldicke $d=30^{\text{cm}}$, $F=700^{\text{qcm}}$, $l=10^{\text{m}}=1000^{\text{cm}}$, $E=120000^{\text{at}}$, $s=0{,}5^{\text{cm}}$, so wird

$$W\cdot 0{,}5=\frac{1200\cdot 80}{1{,}5}-\frac{W^2\,1000}{2\cdot 120000\cdot 700}.$$

Dies giebt rund $W=70000^{\text{kg}}$, wovon man etwa $^1/_{10}$, d. h. 7000^{kg}, als sicher zulässige Belastung des Pfahles nimmt. Für die unwirksame Fallhöhe wird $\frac{1200\cdot h_0}{1{,}5}=\frac{70000^2\cdot 1000}{2\cdot 120000\cdot 700}$ mit $h_0=$ etwa 36^{cm}. Mit Berücksichtigung dieses Umstandes wird dann der Wirkungsgrad der Ramme (statt nach Gl. 24) nur sein:

$$\eta_1=\frac{Q(h-h_0)}{Q h}\cdot\frac{1}{1+\frac{Q_1}{Q}}=\frac{Q(h-h_0)}{(Q+Q_1)h}=\frac{80-36}{1{,}5\cdot 80}=0{,}37.$$

Durch Vergrösserung von h würde derselbe erhöht werden. — Grossen praktischen Werth haben vorstehende Formeln leider nicht.

d) Hämmer zum Schmieden oder Nieten.

Während beim Eintreiben von Nägeln, Pfählen u. dgl. die für die äussere Bewegung verloren gehende Arbeit $\mathfrak{A}_v$, welche unter Erwärmung eine bleibende Formänderung erzeugt, als unerwünschter Verlust zu bezeichnen ist, besteht beim Schmieden oder Nieten in diesem äusseren Arbeitsverlust gerade das Nützliche. Der Wirkungsgrad hierfür ist nach Gl. 22 (S. 142)

29) $$\eta=\frac{\mathfrak{A}_v}{^1/_2 M c^2}=\frac{1}{1+\frac{M}{M_1}}.$$

Dieser wird gross, wenn $M_1 : M$ gross wird, d. h. wenn die getroffene Masse gross ist im Verhältnisse zur stofsenden Masse. Zu diesem Zwecke legt man das Schmiedestück auf einen schweren Amboss und unterstützt diesen durch einen noch schwereren Körper, die Chabotte, welche bei Dampfhämmern tief in den Erdboden reicht.

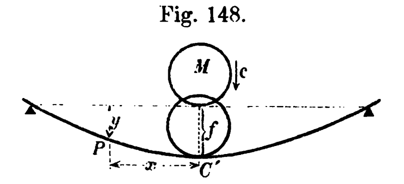
Amboss und Chabotte bilden dann in Bezug auf die Wirkung des Stofses mit dem Schmiedestück eine einzige Masse M_1. Ist z. B. $M_1 = 10 M$, so wird $\eta = 1 : 1{,}1 = 0{,}91$, d. h. es werden 91 % der aufgewandten Arbeit zur Formänderung verwandt, während 9 % der Arbeit die Chabotte allmählich tiefer in den Erdboden eintreiben.

Beim Nieten muss das Niet durch einen möglichst schweren Vorhalt-Hammer von der Masse M_1 gegen Fortbewegung durch den Schlag des Niethammers thunlichst geschützt werden.

e) Biegung durch den Stofs eines Körpers.

Dieser Fall wurde auf S. 122 unter der Voraussetzung behandelt, dass die Masse des getroffenen, auf Biegung beanspruchten Körpers vernachlässigt werden könne. Soll diese Masse dagegen berücksichtigt werden, so kann man die Aufgabe in folgender Weise behandeln. Die bisherigen Gleichungen für den Stofs setzten voraus, dass sämmtliche Punkte des gestofsenen Körpers sich im Augenblicke der stärksten Zusammenpressung mit übereinstimmender Geschwindigkeit u weiter bewegten. Wird aber ein an beiden Enden unterstützter Stab von der Masse M_1 in seiner Mitte durch eine mit der Geschwindigkeit c dagegen stofsende Masse M getroffen (Fig. 148), so wird der Stab sich biegen, und die Geschwindigkeiten seiner einzelnen Punkte werden in jedem Augenblick unter einander verschieden sein; an den Auflagern bleiben die Geschwindigkeiten Null, während sie nach der Mitte hin zunehmen. Für das Verhältnis der Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte giebt das Verhältnis der Ordinaten der betreffenden Stellen einen Anhalt. Da die Weglängen y und f in gleichen Zeiten durchlaufen werden, so müssen die Geschwindigkeiten und ebenso auch die Beschleunigungen p_y und p_1 der Punkte P und C sich verhalten wie $y : f$, d. h. es ist

Fig. 148.



$$p_y = p_1 \frac{y}{f}.$$

Nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes (1. Theil, 2. Aufl., S. 144) ist

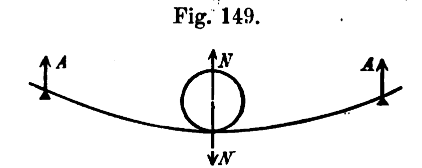
$$\Sigma m p_y = \Sigma Y.$$

Darin bedeutet ΣY die Summe sämmtlicher äusseren Kräfte der Richtung der p_y. In irgend einem Augenblicke während des Stofses wirkt nun an dem getroffenen Stabe im Sinne der p_y die Kraft $N - 2A$ (Fig. 149), mithin wird

$$\Sigma m p_y = \frac{p_1}{f} \Sigma m y = N - 2A.$$

Darin ist m die Masse eines Längentheilchens, d. h. bei überall gleichem Querschnitte, den wir hier annehmen wollen,

Fig. 149.



$$m = \frac{\gamma}{g} F \cdot dx.$$

Daher entsteht

$$\frac{p_1}{f} \frac{\gamma}{g} F \int y\, dx = N - 2A.$$

Man könnte nun $y:f$ aus der Gleichung der Biegungslinie für den Fall einer ruhigen Belastung ableiten. Da es aber zweifelhaft ist, ob die verschiedenen Biegungslinien, die in den verschiedenen Augenblicken des Stofses sich bilden, dieselbe Form haben wie diejenige der ruhenden Last, so nehmen wir der Einfachheit wegen die Biegungslinie für den Stofs als Parabel an. Dann wird $\int y\, dx = {}^2/_3 f l$, mithin

$$p_1 \frac{\gamma}{g} F l \frac{2}{3} = N - 2A, \quad \text{oder,}$$

weil $\gamma F l = M_1 g$ ist,

$$p_1 \cdot \frac{2}{2} M_1 = N - 2A.$$

Für den stofsenden Körper ist $Mp = N$, mithin

$$p_1 \frac{2}{3} M_1 = Mp - 2A.$$

Es ist nun nicht etwa, wie im Gleichgewichtszustande $2A = N$; vielmehr ist $2A$ erheblich kleiner als N. Ist der Stofs sehr heftig, so pflanzt sich seine Wirkung nicht einmal bis zu den Stützpunkten fort; es bleibt (unter Vernachlässigung der Schwere) $A = 0$; der Druck N wirkt nur ausserordentlich kurze Zeit, wächst dabei zu einem verhältnismässig grossen Werth und bringt an dem Stab eine nur örtliche zerstörende Wirkung hervor, wie man z. B. mit

einer Gewehrkugel versuchen kann. In solchem Fall ist von der Ausbildung einer Biegungslinie keine Rede. Aber auch bei weniger heftigem Stofse kann doch meist $2A$ gegenüber N vernachlässigt werden, so dass

$$p:p_1 = \tfrac{2}{3} M_1 : M \quad \text{ist.}$$

Vergleicht man diese Formel mit Gl. 1, S. 136, so findet man, dass an Stelle von M_1 nunmehr $\tfrac{2}{3} M_1$ getreten ist. Es folgt dann in gleicher Weise wie dort für die Geschwindigkeit des Stofspunktes im Augenblicke der stärksten Formänderung (mit c_1 = Null)

1) $$u = \frac{Mc}{M + \tfrac{2}{3} M_1},$$

während der Punkt P eine Geschwindigkeit

$$u_y = u\frac{y}{f} \quad \text{hat.}$$

Nehmen wir den Stofs, wie es in solchen Fällen meistens geschieht, als unelastisch an, so ist das gesammte Arbeitsvermögen beider Körper nach dem Stofse

$$\tfrac{1}{2} M u^2 + \tfrac{1}{2} \Sigma m u_y^2,$$

wofür sich in ähnlicher Weise wie oben mit $m = \frac{M_1}{l} \cdot dx$

$$\frac{u^2}{2}\left(M + \frac{M_1}{f^2 l}\int y^2\, dx\right)$$

ergiebt. Nun ist $\tfrac{1}{2}\int y\, dx \cdot y$ das statische Moment der Parabelfläche in Bezug auf die Sehne, $= \tfrac{2}{3} f l \cdot \tfrac{2}{5} f$ (1. Theil, 2. Aufl., S. 135), mithin $\int y^2\, dx = \tfrac{8}{15} f^2 l$; also wird das Arbeitsvermögen

2) $$\frac{u^2}{2}\left(M + \tfrac{8}{15} M_1\right)$$

oder, wenn man den obigen Werth für u (Gl. 1) einsetzt, und bedenkt, dass das Arbeitsvermögen in Biegungsarbeit umgewandelt wird, nach Gl. 4, S. 119/20

3) $$\frac{Mc^2}{2} \frac{1 + \frac{8}{15}\frac{M_1}{M}}{\left(1 + \frac{2}{3}\frac{M_1}{M}\right)^2} = \frac{V}{6}\frac{\sigma^2}{E}\frac{i^2}{e^2}.$$

Die Umständlichkeit dieser Formel steht nicht im Verhältnisse zur Sicherheit ihrer Grundlagen. Innerhalb ziemlich weiter Grenzen

($M_1 : M = {}^1/_{10}$ bis 10) kann man dafür annäherungsweise einfacher schreiben

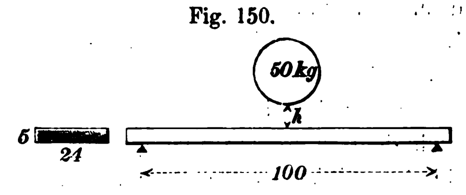
4) $$\frac{Mc^2}{2} \frac{1}{\left(1 + 0{,}8 \frac{M_1}{M}\right)} = \frac{V}{6} \frac{\sigma^2}{E} \frac{i^2}{e^2}.$$

Beispiel: Auf die Mitte einer Bohle von 1 m Spannweite, 24 cm Breite, 5 cm Stärke (Fig. 150) falle ein Gewicht von 50 kg. Wie gross darf die Fallhöhe h sein, damit die Bohle nicht über 170 at gespannt werde? Wiegt 1 cbm Holz 600 kg, so wird das Gewicht der Bohle

$Q_1 = 1 \cdot 0{,}24 \cdot 0{,}05 \cdot 600 = 7{,}2$ kg.

Es wird ${}^1/_2 Mc^2 = Qh$.

Fig. 150.



Die obigen Gleichungen gelten für einen Stofs in wagerechter Richtung, bei dem die Schwere keine Arbeit verrichtet. Beim lothrecht abwärts erfolgenden Stofs aber verrichtet die Schwere eine Arbeit, während die Bohle sich um f durchbiegt. Das Gewicht Q leistet die Arbeit Qf, das Gewicht Q_1 der Bohle aber ${}^2/_3 Q_1 \cdot f$, weil ein beliebiges Theilchen der Bohle nur um y sinkt (vgl. S. 146, Fig. 148). Nun beträgt die Durchbiegung der Bohle bei $\sigma = 170$ at nach S. 49, Gl. 14:

$$f = \frac{1}{12} \frac{170}{120000} \frac{100^2}{2{,}5} = 0{,}47 \text{ cm},$$

daher wird nach Gl. 4 (mit $i^2 : e^2 = {}^1/_3$, vgl. S. 120)

$$\frac{50h}{1 + 0{,}8 \cdot \frac{7{,}2}{50}} + 0{,}47 \left(50 + \frac{2}{3} 7{,}2\right) = \frac{12000}{18} \frac{170^2}{120000}$$

oder $h = 3$ cm.

Im Ruhezustande entspricht der Belastung mit 50 kg nur eine Spannung

$$\sigma = \frac{50 \cdot 100 \cdot 6}{4 \cdot 24 \cdot 5^2} = 12{,}5 \text{ at},$$

und schon durch einen Fall der Last von 3 cm Höhe steigt die Spannung auf das 13,6 fache. Hiernach ist es begreiflich, dass man die in Gleichgewichts-Berechnungen einzusetzenden Spannungen oft nur sehr gering annehmen darf, wenn Stöfse der Last zu erwarten sind.

f) Vollkommen elastischer Stofs.

Je kleiner die Stofsgeschwindigkeit $c - c_1$ und je elastischer die Körper sind, um so mehr wird sich k dem Werth 1 nähern.

Für $k = 1$ wird nach Gl. 10/11, S. 138

1) $$c - v = 2\frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1}}; \quad v_1 - c_1 = 2\frac{c - c_1}{1 + \frac{M_1}{M}}.$$

Sind die Massen einander gleich, wie es bei Billardkugeln annähernd zutrifft (Fig. 151), so wird

$$c - v = c - c_1, \quad \text{d. h. } v = c_1,$$
$$v_1 - c_1 = c - c_1, \quad \text{d. h. } v_1 = c;$$

d. h. es vertauschen die Massen ihre Geschwindigkeiten. Sind die Kugeln im Aussehen nicht verschieden, so sieht man die Wirkung des Stofses kaum. Denn mit der Geschwindigkeit c, die vorher die eine Kugel hatte, bewegt sich auch nach dem Stofs eine Kugel weiter, ebenso mit der Geschwindigkeit c_1 die andere, gerade wie wenn sich die Kugeln durchdrungen hätten.

Fig. 151.

Dieser Fall findet auch Anwendung auf Eisenbahnwagen, wenn dieselben beim Verschieben mit geringer Stofsgeschwindigkeit auf einander treffen; denn bei geringer Heftigkeit des Stofses verhalten sich die Bufferfedern ziemlich elastisch. Bei ungleichen Massen sind die Gl. 1 anzuwenden.

Fig. 152.

Stöfst ein Körper gegen eine ruhende und unbewegliche elastische Wand (Fig. 152), so muss (wie S. 140) $M_1 : M = \infty$ gesetzt werden. Dann wird

$$c - v = \frac{2c}{1 + 0}, \quad \text{d. h. } v = -c.$$

Der Körper wird also mit der gleichen Geschwindigkeit von der Wand zurückgeworfen, mit der er dieselbe traf.

2. Stofs sich drehender Körper.

Zwei Körper drehen sich um feste Parallelachsen A und A_1 und treffen derartig zusammen, dass zwischen ihnen ein gegenseitiger Druck N auftritt, der rechtwinklig zu der Ebene beider Drehachsen steht und diese Ebene in P schneidet (Fig. 153). Dann ist P der Stofspunkt; er sei von A und A_1 um a bezw. a_1 entfernt. Die Umfangsgeschwindigkeiten beider Körper am Stofspunkte mögen c bezw. c_1 betragen. Diese Geschwindigkeiten sind der Unterscheidung

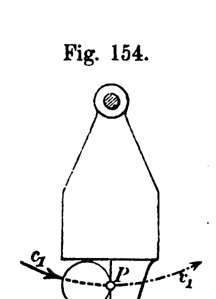
wegen auf dem Drehungskreise angedeutet, ebenso die Geschwindigkeiten v und v_1 nach dem Stofs (an der rechten Seite der Figur). Der Druck N ertheilt der stofsenden Masse eine im Stofspunkte gemessene Umfangs-Verzögerung $p = \frac{N}{\mu}$ und der gestofsenen Masse an derselben Stelle eine Umfangsbeschleunigung $p_1 = \frac{N}{\mu}$, wenn μ und μ_1 die auf den Stofspunkt bezogenen Massen der beiden Körper sind (1. Theil, 2. Aufl, S. 272). Hiernach ist

Fig. 153.

1) $$p : p_1 = \mu_1 : \mu.$$

Diese Gleichung entspricht der Gl. 1, S. 136, für den geraden centralen Stofs freier Körper; nur treten an die Stelle der wahren Massen M_1 und M hier die auf P bezogenen Massen μ_1 und μ, welche den Bedingungen $J = \mu a^2$, $J_1 = \mu_1 a_1^2$ genügen, wenn J und J_1 die Trägheitsmomente der Körper in Bezug auf die Drehachsen sind. Hiernach ergeben sich auch für die Geschwindigkeits-Änderungen während des Stofses die Gleichungen in derselben Weise wie Gl. 10 und 11, S. 138, wenn man auch in diesen M und M_1 mit μ und μ_1 vertauscht; nämlich

Fig. 154.



2) $$c - v = \frac{c - c_1}{1 + \frac{\mu}{\mu_1}} (1 + k)$$

3) $$v_1 - c_1 = \frac{c - c_1}{1 + \frac{\mu_1}{\mu}} (1 + k).$$

Ist der stofsende Körper aber ein freier Körper, der sich in der Richtung der Stofslinie fortschreitend bewegt und dessen Schwerpunkt auf der Stofslinie liegt (Fig. 154), so gelten obige Gleichungen mit der Abänderung, dass für μ wieder die wahre Masse M eintritt.

Ballistisches Pendel.

Diese Vorrichtung hat Ähnlichkeit mit Fig. 155 und ist in früherer Zeit benutzt worden, um aus der Bewegung des Pendels nach dem Stofse die Geschwindigkeit c des dagegen abgefeuerten Geschosses M zu berechnen. Diese Einrichtung ist ein so vorzügliches Beispiel zu den eben behandelten Vorgängen, dass sie hier besprochen werden soll, wiewohl sie jetzt in der Anwendung durch vollkommenere Vorrichtungen ersetzt ist.

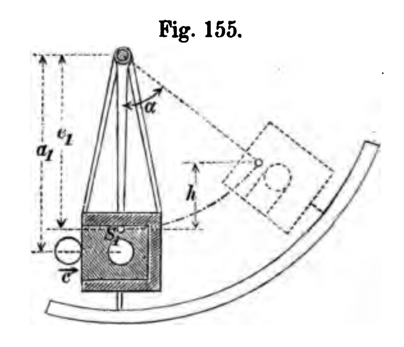


Fig. 155.

Das Pendel hat an der Stelle, gegen die das Geschoss abgefeuert wird, einen vorn offenen, eisernen Kasten, der mit trockenem Thon, weichem Holz u. dgl. gefüllt ist, so dass das Geschoss darin stecken bleibt und der Stofs als unelastisch ($k = 0$) angesehen werden kann. Vor dem Stofs ist das Pendel in Ruhe. Daher wird nach Gl. 2 und 3, S. 151 oder nach Gl. 5, S. 137

$$4)\qquad v = v_1 = u = \frac{Mc}{M + \mu_1}.$$

Bei der Drehbewegung des Pendels nach dem Stofse möge dasselbe einen Winkel α beschreiben, bis es seine Geschwindigkeit verloren hat und zurückschwingt. Ist nun sein Schwerpunkt S_1 um e_1 von der Drehachse entfernt, so hebt sich dieser bei der Drehung um $h = e_1\ (1 - \cos\alpha)$. Dann ist nach dem Satze der Arbeit

$$5)\qquad (M + \mu_1)\frac{{v_1}^2}{2} = M g a_1 + M_1 g e_1)\,(1 - \cos\alpha);$$

die linke Seite ist das Arbeitsvermögen von Pendel und Geschoss nach dem Stofse, die rechte Seite der absolute Werth der Arbeit der Schwerkraft beim Ausschlage des Pendels.

Bei der Ausführung musste das Pendel stets sehr schwer sein im Verhältnisse zum Geschosse, so dass M gegen M_1 und μ_1 zu vernachlässigen ist. Zur Vereinfachung der Formeln empfiehlt es sich, schon jetzt diese Vernachlässigung vorzunehmen. Dann wird aus Gl. 4 und 5:

$$6)\qquad M^2 c^2 = 2\,M_1\,\mu_1\,g\,e_1\ (1 - \cos\alpha).$$

Die auf den Abstand a_1 bezogene Masse μ_1 kann nun ebenfalls durch einen Versuch ermittelt werden, indem man das Pendel schwingen lässt und seine Schwingungsdauer t beobachtet. Für diese gilt (nach 1. Theil, 2. Aufl, S. 283)

$$t = \pi \sqrt{\frac{J_1}{M_1 g e_1}} = \pi \sqrt{\frac{\mu_1 a_1^2}{M_1 g e_1}}, \quad \text{so dass}$$

$$\mu_1 = \frac{M_1 a e_1 t^2}{a_1^2 \pi^2}.$$

Die Einführung dieses Werthes in Gl. 6 liefert

$$M^2 c^2 = \frac{2 M_1^2 g^2 e_1^2 t^2 (1 - \cos\alpha)}{a_1^2 \pi^2}.$$

Setzt man nun noch, um Wurzelausdrücke zu vermeiden,

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \quad \text{so wird}$$

$$c = 2\sin\frac{\alpha}{2}\,\frac{g t}{\pi}\,\frac{M_1}{M}\,\frac{e_1}{a_1}.$$

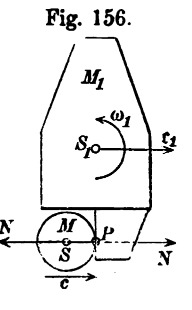
Beispiel: Es sei $M_1 = 500\,M$, $t = 1{,}6^{\text{sek.}}$; $M_1 e_1$ kann nach 1. Theil, 2. Aufl., S. 287, Fig. 354 gemessen werden; es sei $e_1 = 2{,}2^{\text{m}}$. Der untere Zeiger des Pendels bewegt sich in einem geschlitzten Gradbogen, der vor dem Versuche mit Talg ausgestrichen wurde, so dass man, wenn das Pendel wieder zur Ruhe gekommen ist, α bequem ablesen kann; es sei $\alpha = 18^0$. Die Stelle, wo das Geschoss eingedrungen, sei um $a_1 = 2{,}7^{\text{m}}$ von der Drehachse entfernt. Dann wird

$$c = 2\sin 9^0 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{1{,}6}{\pi}\,500 \cdot \frac{2{,}2}{2{,}7} = 637^{\text{m}}.$$

3. Excentrischer Stofs.

Die Masse M stofse derartig gegen die Masse M_1, dass der Stofsdruck N wohl durch den Schwerpunkt S von M, nicht aber durch den Schwerpunkt S_1 von M_1 gehe, sondern von diesem einen Abstand a_1 habe (Fig. 156). Dann wird M_1 durch N eine Winkelbeschleunigung erfahren; aus diesem Grunde wollen wir annehmen, dass M_1 vor dem Stofse schon eine Drehbewegung habe. Eine Achse durch S_1, rechtwinklig zur Bildebene, sei für M_1 eine **freie** Achse; um diese drehe sich der Körper vor dem Stofse mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_1. Die Bildebene sei eine Ebene E, welche durch den Schwerpunkt S_1 rechtwinklig zu jener Achse S_1 gelegt ist; in

Fig. 156.



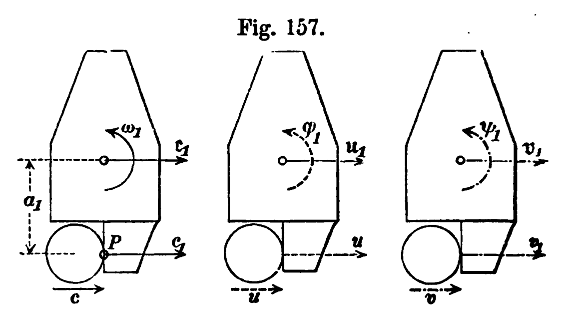
ihr befinde sich der Stofspunkt P und auch der Stofsdruck N. Der Körper M_1 habe vor dem Stofse noch eine Verschiebungs-Geschwindigkeit $\mathfrak{c}_1$, parallel mit N. Für den Körper M sei der Stofs gerade und central; seine Geschwindigkeit sei, wie früher, c.

Der leichteren Vorstellung wegen denken wir uns den Körper M_1 starr und nur M elastisch. Der Punkt P des gestofsenen Körpers hat vor dem Stofse die Geschwindigkeit

$$c_1 = \mathfrak{c}_1 + a_1 \omega_1 .$$

Im ersten Abschnitte des Stofses wird sich der Punkt S dem Punkte P nähern, im zweiten sich wieder von ihm entfernen. Im Augenblicke der stärksten Zusammenpressung haben P und S gleiche Geschwindigkeit u. In diesem Zeitpunkte habe M_1 die Verschiebungsgeschwindigkeit $\mathfrak{u}_1$, die Winkelgeschwindigkeit φ_1, so dass $u = \mathfrak{u}_1 + a_1 \varphi_1$ sein muss. Nach dem Stofse habe M die Geschwindigkeit v, M_1 die Verschiebungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$, die Winkelgeschwindigkeit ψ_1, die Geschwindigkeit am Stofspunkte $v_1 = \mathfrak{v}_1 + a_1 \psi_1$. In Fig. 157 sind die Geschwindigkeits-Zustände in diesen drei Zeitpunkten dargestellt.

Fig. 157.



In irgend einem Augenblicke des Stofses hat M die Verzögerung

1) $$p = \frac{N}{M},$$

der Schwerpunkt S_1 (nach 1. Theil, 2. Aufl., S. 144) die Beschleunigung

2) $$\mathfrak{p}_1 = \frac{N}{M_1},$$

M_1 (nach 1. Theil, 2. Aufl., S. 280 mit $\mathfrak{M} = N a_1$) die Winkelbeschleunigung

3) $$\varepsilon_1 = \frac{N}{\mu_1 a_1}$$

(wenn $J_1 = \mu_1 a_1^2$ das Trägheitsmoment der Masse M_1 in Bezug auf die Schwerpunktsachse S_1 ist). Der Punkt P der Masse M_1 hat somit die Gesammtbeschleunigung

$$p_1 = \mathfrak{p}_1 + a_1 \varepsilon_1 = N\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{\mu_1}\right).$$

Hieraus ergeben sich die Verhältnisse

$$p : \mathfrak{p}_1 = M_1 : M,$$

$$p : a_1 \varepsilon_1 = \mu_1 : M,$$

$$p : p_1 = \frac{1}{M} : \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{\mu_1}\right).$$

Ebenso wie diese Beschleunigungen müssen sich auch die entsprechenden Geschwindigkeits-Änderungen im ersten Abschnitte des Stofses verhalten. Also

4) $$(c - u) : (\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{c}_1) = M_1 : M,$$

5) $$(c - u) : a_1 (\varphi_1 - \omega_1) = \mu_1 : M,$$

6) $$(c - u) : (u - c_1) = \frac{1}{M} : \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{\mu_1}\right).$$

Gleichung 6 liefert unmittelbar

$$u = \frac{c\left(\frac{M}{M_1} + \frac{M}{\mu_1}\right) + c_1}{1 + \frac{M}{M_1} + \frac{M}{\mu_1}}$$ und darnach wird

7) $$c - u = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1} + \frac{M}{\mu_1}}.$$

In Verbindung mit Gl. 4 entsteht dann

8) $$\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{c}_1 = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M_1}{M} + \frac{M_1}{\mu_1}},$$

während Gl. 5 und 7 ergeben

9) $$a_1 (\varphi_1 - \omega_1) = \frac{c - c_1}{1 + \frac{\mu_1}{M} + \frac{\mu_1}{M_1}}.$$

Die Geschwindigkeits-Änderungen innerhalb der ganzen Dauer des Stofses erhält man nun, indem man die des ersten Abschnittes noch mit $1 + k$ multiplicirt. Daher

10) $$c - v = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1} + \frac{M}{\mu_1}}(1 + k),$$

11) $$\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{c}_1 = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M_1}{M} + \frac{M_1}{\mu_1}}(1 + k),$$

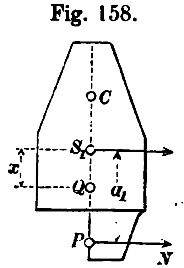
12) $$a_1(\psi_1 - \omega_1) = \frac{c - c_1}{1 + \frac{\mu_1}{M} + \frac{\mu_1}{M_1}}(1 + k).$$

Das Bildungsgesetz dieser Gleichungen 10—12 ist fast ebenso einfach wie das der Gleichungen für den geraden centralen Stofs (S. 138). Es kommen hier drei Geschwindigkeits-Änderungen in Frage: die der stofsenden Masse M, die des Schwerpunktes der gestofsenen Masse M_1 und die Änderung der Umfangsgeschwindigkeit der Drehung um die Schwerpunktachse S_1, gemessen am Stofspunkte, wobei μ_1 als träge Masse auftritt. Die rechten Seiten der Gleichungen enthalten übereinstimmend im Zähler die Stofsgeschwindigkeit $c - c_1$ und den Faktor $1 + k$. Die Nenner enthalten als Summanden 1 und zwei Verhältnisse unter den drei Massen M, M_1 und μ_1. Diese Verhältnisse sind derartig geordnet, dass stets diejenige Masse, um deren Geschwindigkeit sich's gerade handelt, in diesem Verhältnisse den Zähler bildet, während die beiden anderen Massen die Nenner darstellen. Wenn man in diesem Sinne die entstehenden Gleichungen überblickt, kann man sie leicht aus dem Kopfe anschreiben.

Mittelpunkt des Stofses.

Ein beliebiger, zwischen S_1 und P im Abstand x von S_1 befindlicher Punkt Q der Masse M_1 (Fig. 158) erfährt eine gesammte Tangential-Beschleunigung p_x, welche sich aus der Verschiebungs-Beschleunigung $\mathfrak{p}_1$ und der Drehungs-Beschleunigung $x\varepsilon_1$ zusammensetzt; es ist $p_x = \mathfrak{p}_1 + x\varepsilon_1$, oder nach Gl. 2 und 3, S. 145:

Fig. 158.



$$p_x = N\left(\frac{1}{M_1} + \frac{x}{\mu_1 a_1}\right).$$

Zwischen P und S_1 ist $p_x > \mathfrak{p}_1$; in S_1 ist $p_x = \mathfrak{p}_1$, während die Punkte der über S_1 hinaus verlängerten

Geraden PS_1 einem negativen x entsprechen, so dass $p_s < \mathfrak{p}_1$ wird. Für einen Punkt C heben sich die Beschleunigungen $\mathfrak{p}_1$ und $CS_1 \cdot \varepsilon_1$ gerade auf, wenn nämlich

$$\frac{N}{M_1} = \frac{N}{\mu_1} \frac{\overline{CS_1}}{a_1} \quad \text{oder}$$

$$CS_1 = \frac{\mu_1 a_1}{M_1}, \quad \text{mithin}$$

$$CP = \frac{\mu_1 a_1}{M_1} + a_1 = \frac{\mu_1 a_1^2 + M_1 a_1^2}{M_1 a_1} \quad \text{ist.}$$

Da nun $\mu_1 x_1^2$ das Trägheitsmoment für die Schwerpunkts-Achse, so ist der Zähler der letzten Gleichung das Trägheitsmoment J_p in Bezug auf eine Achse P, rechtwinklig zur Bildebene, während der Nenner das statische Moment für dieselbe Achse darstellt. Somit ist (1. Theil, 2. Aufl., S. 283)

13) $$CP = l = \frac{J_P}{M_1 a_1}$$

die Schwingungslänge für den an der Achse P als Pendel aufgehängten Körper oder wegen der Vertauschbarkeit von Drehachse und Schwingungsachse auch für ein bei C aufgehängtes Pendel mit der Schwingungsachse P. Sämmtliche Punkte der rechtwinklig zur Bildebene durch C gelegten Geraden erfahren übereinstimmend die Beschleunigung Null. War die Masse M_1 nun vor dem Stoſs in Ruhe, so werden die Punkte der Geraden C auch durch den Stoſs nicht aus der Ruhe gebracht werden, während alle anderen Punkte in Beschleunigung gerathen. Befestigt man daher den Körper an der Achse C, so wird diese durch einen Stoſs bei P keine Einwirkung erfahren. Aus diesem Grunde nennt man C die unempfindliche Achse und P den Mittelpunkt des Stoſses in Bezug auf die Achse C. Dabei wurde vorausgesetzt, dass die rechtwinklig zur Bildebene, d. h. parallel mit C liegende Schwerpunktsachse S_1 eine freie Achse sei (1. Theil, 2. Aufl., S. 293) und dass P in der zu dieser Achse rechtwinkligen Schwerpunkts-Ebene liege.

Diese Beziehung ist wichtig für Körper, welche um Achsen drehbar sind und durch den Stoſs von Daumen oder dgl. bewegt werden sollen (Aufwerfhämmer); greift der Daumen im Mittelpunkte des Stoſses an, so wird die Achse durch den Stoſs nicht beeinflusst.

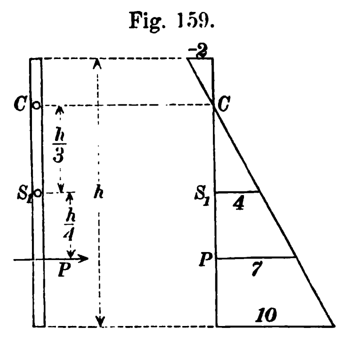
Auch bei Werkzeugen, die durch einen Schlag getroffen, oder mit denen Schläge ausgeübt werden, ist es vortheilhaft, die führende Hand bei dem „Unempfindlichkeitspunkt" C angreifen zu lassen, wenn bei P der Schlag erfolgt, damit die Hand keine Erschütterung (Prellung) empfinde. Hiernach sind die Längen der Stiele der Schlagwerkzeuge zu bemessen.

Beispiel: Der gestofsene Körper sei ein gerader Stab; zu dem im unteren Viertelpunkte gegebenen Stofspunkte P soll die unempfindliche Achse C gesucht werden. Es wird nach Gl. 13

$$l = \frac{J_P}{M_1 a_1} = \frac{M_1 \, {}^1\!/_{12} h^2 + M_1 \, {}^1\!/_{16} h^2}{M_1 \cdot {}^1\!/_4 h} = \frac{7}{12} h,$$

d. h. C liegt um $({}^7\!/_{12} - {}^1\!/_4) h = {}^1\!/_3 h$ über der Stabmitte S_1.

Fig. 159.



Fasst man die Stange bei C mit der Hand, so wird ein bei P geführter Stofs der Hand nicht fühlbar werden. Das Gleiche gilt, wenn man den Stab bei P erfasst und der Schlag bei C erfolgt.

Es sollen nun auch die Geschwindigkeits-Änderungen berechnet werden, welche entstehen, wenn gegen die ruhende Stange bei P eine kugelförmige Masse M mit der Geschwindigkeit c stöfst. Der Stofs werde als unelastisch und die Masse M gleich der Masse M_1 vorausgesetzt. Dann ist

$$k = 0, \qquad \omega_1 = 0,$$
$$\mathfrak{c}_1 = 0, \qquad M_1 = M,$$
$$c_1 = 0, \qquad \mu_1 = {}^4\!/_3 M_1$$

und nach den Gl. 10 – 12 (S. 156)

$$c - v = \frac{c}{1 + 1 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{11} c; \quad v = \frac{7}{11} c.$$

$$\mathfrak{v}_1 = \frac{c}{1 + 1 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{11} c,$$

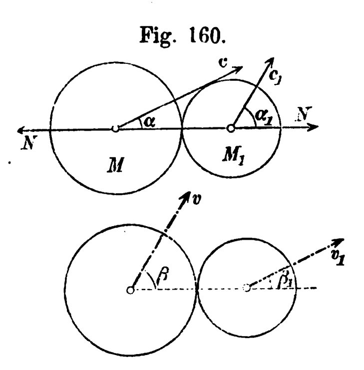
$$a_1 \psi_1 = \frac{c}{1 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3}} = \frac{3}{11} c.$$

Da die Umfangsgeschwindigkeiten der Drehung an den verschiedenen Stellen mit dem Abstande x vom Schwerpunkte verhältnisgleich, so ist die Darstellung der Gesammt-Geschwindigkeiten eine Gerade. Trägt man in P und S_1 die Geschwindigkeiten v und $\mathfrak{v}_1$ durch Ordinaten 7 und 4 auf (Fig. 158), so ergiebt sich eine Gerade, die die Stange in dem Unempfindlichkeitspunkte C schneidet.

4. Schiefer centraler Stofs.

Die Schwerpunkte der beiden Körper mögen im Augenblicke des Zusammentreffens Geschwindigkeiten c und c_1 haben, die mit der durch beide Schwerpunkte gehenden Stofslinie die Winkel α und α_1 bilden (Fig. 160). Man kann die Geschwindigkeiten zerlegen in $c \cos \alpha$ und $c_1 \cos \alpha_1$ nach der Richtung der Stofslinie und $c \sin \alpha$ bezw. $c_1 \sin \alpha_1$ rechtwinklig dazu. Dann werden die Geschwindigkeitsänderungen in der Richtung der Stofslinie, die unter Einwirkung des Stofsdruckes N entstehen, völlig nach den Regeln des geraden centralen Stofses zu beurtheilen sein. In der Richtung, rechtwinklig zur Stofslinie wird zwischen den Kugeln in Wirklichkeit ein Reibungswiderstand auftreten, dessen Berücksichtigung die Aufgabe ziemlich verwickelt macht. Wir wollen jedoch hier diese Reibung vernachlässigen, bezw. die Körper als völlig glatt betrachten. Unter dieser Voraussetzung tritt dann rechtwinklig zur Stofslinie keine Kraft auf, so dafs die Seitengeschwindigkeiten $c \sin \alpha$ und $c_1 \sin \alpha_1$ unverändert verbleiben. Nennt man v und v_1 die Geschwindigkeiten nach dem Stofse mit den Neigungswinkeln β und β_1 gegen die Stofslinie so wird nunmehr nach Gl. 10 und 11, S. 138

Fig. 160.



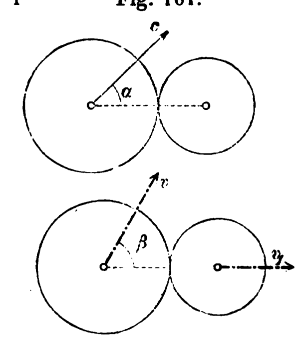
$$1)\qquad c \cos \alpha - v \cos \beta = \frac{c \cos \alpha - c_1 \cos \alpha_1}{1 + \frac{M}{M_1}} (1 + k),$$

$$2)\quad \begin{cases} v_1 \cos \beta_1 - c_1 \cos \alpha_1 \\ = \dfrac{c \cos \alpha - c_1 \cos \alpha_1}{1 + \dfrac{M_1}{M}} (1 + k). \end{cases}$$

$$3)\qquad v \sin \beta = c \sin \alpha,$$

$$4)\qquad v_1 \sin \beta_1 = c_1 \sin \alpha_1.$$

Fig. 161.



Stofs gegen eine ruhende Kugel. War M_1 zu Anfang in Ruhe, d. h. $c_1 = 0$ (Fig. 161), so wird

$$c \cos\alpha - v \cos\beta = \frac{c \cos\alpha}{1 + \frac{M}{M_1}}(1 + k),$$

$$v_1 \cos\beta_1 = \frac{c \cos\alpha}{1 + \frac{M_1}{M}}(1 + k),$$

$$v \sin\beta = c \sin\alpha,$$

$$v_1 \sin\beta_1 = 0, \quad \text{also } \beta_1 = 0, \quad \text{und}$$

$v_1 = v_1 \cos\beta_1$. Die getroffene Kugel bewegt sich nach dem Stofs in der Richtung der gemeinschaftlichen Normalen der Berührungsstelle. Haben die Kugeln gleiche Massen, ist also $M = M_1$, so wird

Fig. 162.

5) $v \cos\beta = {}^1/_2\, c \cos\alpha\,(1 - k)$,

6) $v \sin\beta = c \sin\alpha$, daher

7) $\operatorname{tg}\beta = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - k}$,

8) $v_1 = {}^1/_2\, c \cos\alpha\,(1 + k)$.

Bei unelastischem Stofse wird $k = 0$, daher $\operatorname{tg}\beta = 2 \operatorname{tg}\alpha$. Ist (Fig. 162) $AB = c$, $\measuredangle BAC = \alpha$, $AC = c \cos\alpha$, so wird, wenn man $AD = DC$ macht, $DB = v$, $DC = v_1$ nach Richtung und Grösse.

Fig. 163.

Bei vollkommen elastischem Stofse aber wird $k = 1$, daher $v \cdot \cos\beta = 0$, $\beta = 90^0$, $v = c \sin\alpha$, $v_1 = c \cos\alpha$; Fig. 163 ergiebt daher $v = CB$, $v_1 = AC$, nach Grösse und Richtung. Beide Kugeln bewegen sich also nach dem Stofse unter rechtem Winkel aus einander.

Stofs einer Kugel gegen eine feste Wand. Mit $c_1 = 0$ und $M_1 = \infty$ geht Gl. 1 über in:

$c \cos\alpha - v \cos\beta = c \cos\alpha\,(1 + k)$ oder:

$v \cos\beta = - c \cos\alpha \cdot k$; ferner

$v \sin\beta = c \sin\alpha$,

mithin $\operatorname{tg}(-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{k}$.

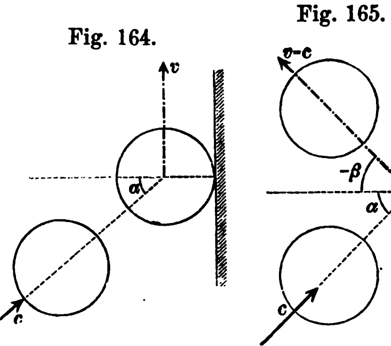


Fig. 164. Fig. 165.

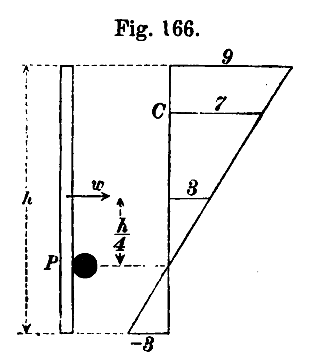
Für unelastischen Stofs ergiebt sich (mit $k = 0$) $v \cos \beta = 0$, also $-\beta = 90^0$ und $v = c \sin \alpha$, d. h. die Seitengeschwindigkeit, rechtwinklig zur Wand, geht verloren, es bleibt nur die Seitengeschwindigkeit in der Richtung der Wand erhalten (Fig. 164).

Für elastischen Stofs wird (mit $k = 1$): $v \cos \beta = -c \cos \alpha$ und $-\beta = \alpha$, daher $v = -c$, d. h. die Kugel wird von der festen Wand ohne Verlust an Geschwindigkeit so zurückgeworfen wie ein Lichtstrahl von einem Spiegel (Fig. 165); Ausfall- und Einfallwinkel sind einander gleich.

5. Einige besondere Fälle des Stofses.

Es mögen hier noch einige Fälle des Stofses betrachtet werden, auf welche die entwickelten Formeln scheinbar nicht, oder nicht unmittelbar passen, die aber doch durch ähnliche Betrachtungen, wie sie im Vorstehenden zur Anwendung gelangten, zur Lösung geführt werden können.

Fig. 166.



1. Ein fortschreitender Stab stöfst gegen ein festes Hindernis. Ein Stab von der Länge h bewege sich mit der überall gleichen Geschwindigkeit w und treffe im unteren Viertelpunkte P auf eine unwandelbar befestigte Querstange (Fig. 166). Es soll die Bewegung des Stabes nach dem Stofs untersucht werden.

Die Querstange ist wegen ihrer Unbeweglichkeit als eine unendlich grosse Masse aufzufassen. Die Gleichungen 11 und 12, S. 156, sind auf diesen Fall anwendbar; man hat darin

$$c = 0, \quad c_1 = w, \quad \mathfrak{c}_1 = w,$$
$$\omega_1 = 0, \quad M = \infty, \quad \mu_1 = {}^4/_3 M_1$$

zu setzen und erhält für unelastischen Stofs ($k = 0$)

$$\mathfrak{v}_1 - w = \frac{-w}{1 + {}^3/_4}; \quad \mathfrak{v}_1 = {}^3/_7 w;$$

$$a_1 \psi_1 = \frac{-w}{1 + {}^4/_3} = -{}^3/_7 w;$$

$$v_1 = \mathfrak{v}_1 + a_1 \psi_1 = {}^3/_7 w - {}^3/_7 w = 0.$$

Neben der Stange sind die Geschwindigkeiten als Vielfache von $^1/_7\, w$ dargestellt.

Man kann diese Aufgabe auch lösen, indem man die Bewegung des Stabes auffasst als scheinbare Ruhe in Bezug auf einen mit der Geschwindigkeit w fortschreitenden Raum. Die Masse $M = \infty$ bewegt sich dann mit der Geschwindigkeit w gegen den ruhenden Stab. Mit den hiernach erhaltenen Geschwindigkeiten hat man dann die Geschwindigkeit w des Raumes in geeigneter Weise wieder zu verbinden.

2. Ein fortschreitend gleitender Würfel stöfst mit seiner vorderen unteren Kante gegen ein Hindernis (Fig. 167). Der Körper muss dann eine Drehung um die Kante A ausführen; diese betrachten wir aber als das Ergebnis einer Verschiebung des Schwerpunktes mit der Geschwindigkeit v rechtwinklig zu AS (Fig. 168) und einer Drehung um die zur Bildebene rechtwinklige Schwerpunktsachse S mit der Winkelgeschwindigkeit ω, wodurch mit $r\omega = v$ der Punkt A die Geschwindigkeit Null bekommt. Wir zerlegen v in die Seitengeschwindigkeiten v_1 und v_2, die hier offenbar gleich sein müssen. Da nun die Geschwindigkeit v_2 durch den Stofs neu entsteht, so muss neben der Kraft N_1 auch noch eine Kraft N_2 auftreten (Fig. 167). Das Gewicht des Würfels wird gegenüber den Kräften N_1 und N_2 vernachlässigt. Die Würfelkante sei $d = 2e$. Das Trägheitsmoment des Würfels in Bezug auf die Achse S findet man (nach 1. Theil, 2. Aufl., S. 275) leicht zu

Fig. 167.

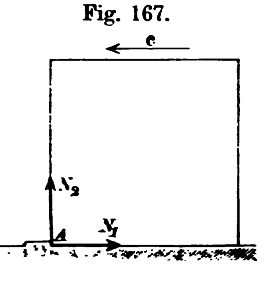


Fig. 168.

$$^1/_6\, M d^2 = {}^2/_3\, M e^2,$$

also ist die auf den Abstand e bezogene Masse $\mu = {}^2/_3\, M$. Während des Stofses erfährt der Schwerpunkt des Würfels eine Beschleunigung

$$p_1 = \frac{N_1}{M} \quad \text{und} \quad p_2 = \frac{N_2}{M}$$

im Sinne dieser Kräfte; die Winkelbeschleunigung ist (nach 1. Theil, 2. Aufl., S. 279)

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{J} = \frac{N_1 \cdot e - N_2 \cdot e}{\mu \cdot e^2}$$

und daher die Umfangsbeschleunigung im Abstand e von S

$$e\varepsilon = \frac{N_1 - N_2}{\mu} = \frac{3}{2}\frac{N_1 - N_2}{M}.$$

Diese Beschleunigungen stehen in den Verhältnissen

$$p_1 : p_2 = N_1 : N_2,$$
$$p_2 : e\varepsilon = 2N_2 : 3(N_1 - N_2).$$

Da der Punkt B aber in lothrechter Richtung die Beschleunigung $p_2 - e\varepsilon$ erfährt, welche (annähernd) $= 0$ sein muss, so ergiebt sich $2N_2 = 3(N_1 - N_2)$, d. h. $N_2 = {}^3/_5\, N_1$. Hiernach wird

$$p_1 : p_2 = 5 : 3, \quad p_2 = e\varepsilon.$$

Setzt man nun an Stelle der Beschleunigungen die entsprechenden Geschwindigkeitsänderungen, so erhält man

$$c - v_1 : v_2 = 5 : 3,$$

oder weil nach Fig. 168 $v_2 = v_1$ sein muss,

$$v_1 = v_2 = {}^3/_8\, c = e\omega; \quad v = v_1\sqrt{2}.$$

Das Arbeitsvermögen nach dem Stofse beträgt

$$\mathfrak{A}_1 = {}^1/_2\,(Mv^2 + \mu e^2 \omega^2) = {}^1/_2\, M(2v_1^2 + {}^2/_3\, v_1^2)$$
$$= {}^1/_2\, Mc^2 \cdot {}^3/_8.$$

Soll der Würfel nach dem Stofse sich überschlagen, nicht wieder zurückfallen, so muss $\mathfrak{A}_1 \geqq$ Arbeit der Schwere beim völligen Aufkippen sein, d. h.

$${}^1/_2\, Mc^2 \cdot {}^3/_8 \geqq Mge(\sqrt{2} - 1) \quad \text{oder}$$

$$\frac{c^2}{2g} \geqq 1{,}1\, e.$$

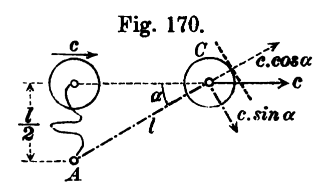
3. **Wirkung von Fäden statt einer Berührung der Körper.** Sind die Körper durch einen anfangs schlaffen Faden verbunden, so werden in dem Augenblicke, wo der Faden straff wird, durch seine Spannkraft ähnliche Wirkungen auf die Körper ausgeübt, wie bei unmittelbarer Berührung durch Stofs. Daher gelten in dem Falle der Fig. 169 für v und v_1 die Gleichungen 10 und 11

Fig. 169.

S. 138. Ist der Faden mit einem Körper M in Verbindung, am anderen Ende aber unwandelbar befestigt, so wirkt die Befestigung wie eine feste Wand ($M_1 = \infty$). Für unelastischen Faden ist $k = 0$, für vollkommen elastischen Faden $k = 1$ zu setzen.

Beispiel: Ein Körper bewegt sich fortschreitend mit der Geschwindigkeit c auf einer Geraden (Fig. 170). Ein undehnbarer Faden von der Länge l sei mit dem Körper verbunden und bei A in einem Abstand $0{,}5\,l$ von der Geraden befestigt. In dem Augenblicke, wo der Faden straff wird, vernichtet seine Spannkraft die Seitengeschwindigkeit $c \cos \alpha$ mit der Geschwindigkeit $c \sin \alpha = 0{,}5\,c$, sodass sich der Körper nun in einer Kreislinie mit dem Mittelpunkt A weiter bewegt. Der Faden wirkt im Augenblicke des Straffwerdens ebenso, als ob der Körper bei C unelastisch gegen eine feste Wand stiefse, welche zu $l = AC$ rechtwinklig ist.

Fig. 170.



Jedes ruckweise Anziehen mittels eines undehnbaren Seiles ist mit einem Arbeitsverluste verbunden.

Zweite Abtheilung.

Mechanik der flüssigen Körper.

Allgemeine Eigenschaften der flüssigen Körper; tropfbar-flüssige und gasförmig-flüssige Körper.

Ein fester Körper hat im spannungslosen Zustand eine bestimmte Form, und jeder Änderung derselben setzen sich innere Widerstandskräfte entgegen. Ein flüssiger Körper aber setzt weder einer Trennung noch einer Verschiebung seiner Theile einen merklichen Widerstand entgegen; es kommen in ihm Zug- und Schubspannungen nicht vor, auch besteht zwischen den einzelnen Theilen des flüssigen Körpers keine merkliche Reibung. Wohl aber zeigen die flüssigen Körper einen Widerstand gegen Verkleinerung des Rauminhaltes, ihre einzelnen Theile vermögen daher Druckkräfte auszuüben und aufzunehmen.

Die flüssigen Körper zerfallen in tropfbar-flüssige und gasförmig-flüssige. Ein tropfbar-flüssiger Körper hat, wenn er der Einwirkung äusserer Kräfte entzogen ist, einen bestimmten endlichen Rauminhalt, ohne das Bestreben, sich auszudehnen. Ein gasförmiger Körper aber hat im Allgemeinen das Bestreben, sich unbegrenzt auszudehnen und kann nur durch äussere Druckkräfte auf einen endlichen Rauminhalt beschränkt werden.

Ein verschiedenes Verhalten zeigen die beiden Arten flüssiger Körper gegenüber einer Vergrösserung der äusseren Druckkräfte. Ein tropfbar-flüssiger Körper erleidet dabei eine nur sehr kleine Verminderung seines Rauminhaltes, so dass man ihn als einen Körper von unveränderlichem Rauminhalt, also auch von unveränderlicher Dichte ansehen kann. Bei einem gas-

förmigen Körper aber hat eine merkliche Vergrösserung der äusseren Druckkräfte auch eine merkliche Zusammendrückung zur Folge, Rauminhalt und Dichte sind durchaus veränderlich.

Der Satz d'Alemberts (1. Theil, 2. Aufl., S. 141), wonach die Gruppe der äusseren Kräfte $[K]$ und die Gruppe der, den Beschleunigungen p der einzelnen Theilchen entsprechenden Ergänzungskräfte $[-mp]$ zusammen den Gleichgewichtsbedingungen starrer Körper unterworfen sind, gilt auch für flüssige Körper.

Fig. 171.

Trennt man einen flüssigen Körper (Fig. 171) durch eine Schnittfläche xy in zwei Theile, so werden letztere längs der Schnittfläche gegenseitig Normaldrücke auf einander ausüben. Auf ein Flächentheilchen dF komme die Druckkraft dD, dann ist

$$p = \frac{dD}{dF}$$

der Flüssigkeitsdruck für die Flächeneinheit. Es lässt sich zeigen, dass dieser Druck p in einem Punkte A des Körpers (Fig. 172) in Bezug auf alle durch diesen Punkt gelegten Schnittebenen dieselbe Grösse hat, oder dass in einem Punkt einer Flüssigkeit der Druck für die Flächeneinheit nach allen Richtungen derselbe ist.

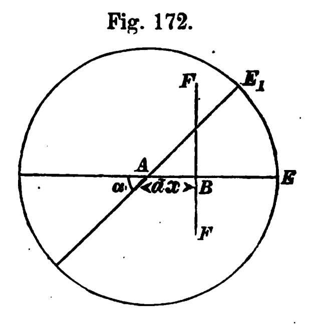
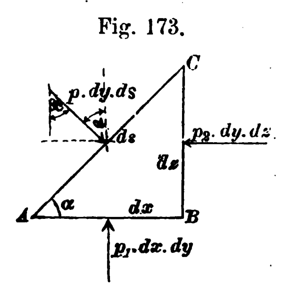


Fig. 172.

Man lege durch den Punkt A zwei Ebenen E und E_1, die den Winkel α mit einander bilden. Im Abstande dx von A füge man noch eine dritte zu E rechtwinklige Ebene FF hinzu. Dann wird dadurch ein dreiseitiges Prisma herausgeschnitten; die Bildebene und eine dazu im Abstande dy parallel gelegte Ebene trennen davon ein Theilchen (Fig. 173) ab, dessen drei bei B rechtwinklig zu einander stehende Kanten dx, dy und dz sind. An der

Fläche AB von der Grösse $dx \cdot dy$ herrsche ein Einheitsdruck p_1, also eine Druckkraft $p_1 \cdot dx \cdot dy$, ebenso an der Fläche BC ein Einheitsdruck p_2, eine Druckkraft $p_2 \cdot dy \cdot dz$ und an der Fläche AC ein Einheitsdruck p, eine Druckkraft $p \cdot dy \cdot ds$. (Die Druckkräfte an den beiden der Bildebene parallelen Schnittebenen kommen nicht in Betracht, da wir nur die Seitenkräfte in den Richtungen dx und dz untersuchen wollen). Diese Druckkräfte sind unendlich klein zweiter Ordnung; der Rauminhalt des Prismas mit $\frac{1}{2} dx dy dz$ und zugleich Masse und Gewicht desselben sind aber unendlich klein dritter Ordnung, das Gewicht verschwindet daher gegen die Druckkräfte und kann auf deren Beziehung zu einander nicht einwirken. Hat das Flüssigkeits-Theilchen eine Beschleunigung q, so bleibt auch seine Ergänzungskraft $- mq$ als unendlich klein dritter Ordnung ausser Betracht; daher müssen die Druckkräfte für sich allein den Gleichgewichts-Bedingungen genügen. Da nun p mit p_1 den Winkel α bildet, so entstehen die Bedingungen:

Fig. 173.



$$p\, dy\, ds \sin\alpha = p_2\, dy\, dz$$

$$p\, dy\, ds \cos\alpha = p_1\, dx\, dy,$$

und weil $dz = ds \sin\alpha$, $dx = ds \cos\alpha$ ist, ergiebt sich

1) $$p = p_2 = p_1 .$$

Dreht man die im Punkte A (Fig. 172) rechtwinklig zur Bildebene stehende Kante dy um AB, so bekommt das Prisma eine andere Richtung, die Ebene FF aber mit dem Einheitsdrucke p_2 behält ihre Lage. Lässt man schliesslich dx zu Null werden, so ist FF eine ebenfalls durch A gehende Ebene, und es gilt dann, dass der Einheitsdruck im Punkt A in Bezug auf eine ganz beliebig gewählte, durch den Punkt A gelegte Ebene E_1 dieselbe Grösse hat, wie der Einheitsdruck in Bezug auf die Ebene F von bestimmter Richtung.

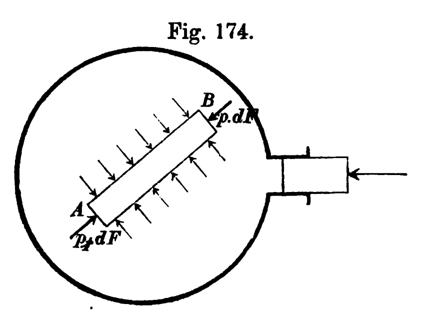
A. Gleichgewicht flüssiger Körper.

Man bezeichnet einen flüssigen Körper als im Gleichgewichte befindlich, wenn seine sämmtlichen Theilchen entweder in wirklicher Ruhe sind, oder doch in scheinbarer Ruhe in Bezug auf einen gleichförmig geradlinig fortschreitenden Raum, womit also eine gegenseitige Bewegung der Flüssigkeitstheilchen, d. h. eine Formänderung des Körpers ausgeschlossen ist. Sämmtliche Theilchen haben übereinstimmend die Beschleunigung Null, somit verschwinden sämmtliche Ergänzungskräfte $[-mp]$, und es müssen die äusseren Kräfte denselben Bedingungen genügen, wie für das Gleichgewicht eines starren Körpers, d. h. man kann sich jeden beliebigen Theil eines flüssigen Körpers, für dessen Gleichgewicht man die Bedingungen sucht, in einen starren Körper verwandelt denken, wobei aber die anzubringenden Kräfte den Eigenschaften flüssiger Körper entsprechen müssen.

I. Gleichgewicht flüssiger Körper ohne Einwirkung der Schwere.

Ist ein im Gleichgewichte befindlicher tropfbar-flüssiger oder gasförmiger Körper ringsum von Gefässwänden umschlossen, die auf ihn Druckkräfte ausüben, so hat das Eigengewicht des flüssigen Körpers auf seine Druckverhältnisse in vielen Fällen der Anwendung einen so unbedeutenden Einfluss, dass es der Vereinfachung wegen gerathen ist, diesen Einfluss ganz zu vernachlässigen.

Fig. 174.



In dem Gefässe (Fig. 174) befinde sich Flüssigkeit im Gleichgewicht. Um eine Beziehung zwischen den Einheitsdrücken p_1 und p bei A und B zu finden, denken wir uns ein von A nach B reichendes gerades Prisma vom Querschnitte dF erstarrt. Das umgebende Wasser übt auf alle Flächen rechtwinklige Druckkräfte aus, u. zw. auf die Endflächen

die Kräfte $p_1 dF$ bezw. $p dF$. Bilden wir die Gleichung der Kräftesumme in der Richtung AB, so kommen dabei die Druckkräfte gegen die Seitenflächen des Prismas nicht in Betracht, und da bei Vernachlässigung des Eigengewichts keine Massenkräfte wirken (vgl. S. 9), so wird einfach

$$p_1 dF = p dF, \quad \text{d. h.} \quad p_1 = p.$$

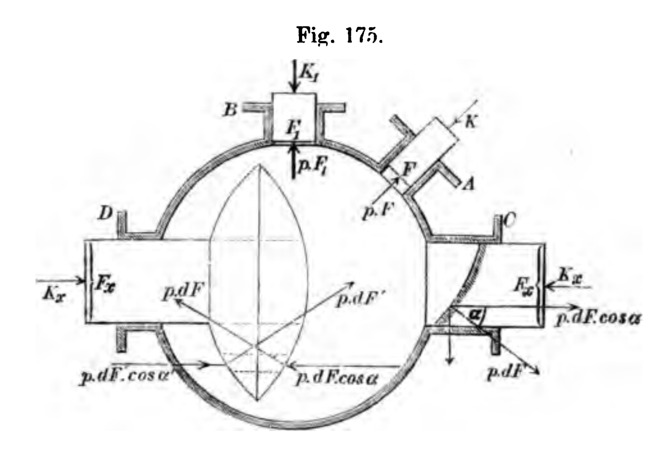
Da nun A und B beliebig gelegene Punkte des flüssigen Körpers sind, so gilt, mit Rücksicht auf S. 166, der Satz:

In einem flüssigen Körper, der ohne Einwirkung von Massenkräften im Gleichgewicht ist, hat der Einheitsdruck an allen Stellen im Innern und an der Oberfläche und nach allen Richtungen gleiche Grösse. Statt des Wortes Einheitsdruck, d. h. Druck auf die Flächeneinheit, soll künftig kürzer Druck gesagt werden, während die auf irgend eine Flächengrösse kommende Kraft mit dem Worte Druckkraft bezeichnet werden möge; in ähnlicher Weise wurden in der Mechanik elastisch-fester Körper die Worte Spannung und Spannkraft unterschieden. Man nennt diesen Druck auch wohl hydrostatischen Druck.

a) Druckkräfte eines flüssigen Körpers gegen verschiebbare Kolben.

An einem Gefässe (Fig. 175) seien cylindrische Ansatzröhren angebracht, welche von genau passenden, aber reibungslos beweglich

Fig. 175.



gedachten Kolben abgeschlossen werden. Wird durch irgend welche Druckkraft gegen einen Kolben in dem flüssigen Körper ein Druck p

erzeugt und soll der flüssige Körper im Gleichgewichte verbleiben, so muss p überall gleich sein. Sind F und F_1 die Querschnittflächen der Kolben A und B, so bekommt der Kolben A eine Druckkraft pF, der Kolben B eine Druckkraft pF_1. *Die Druckkräfte auf die Kolben verhalten sich also wie die Querschnittflächen der Kolben*, und ebenso grosse, aber nach dem Innern des Gefässes gerichtete Kräfte $K = pF$ und $K_1 = pF_1$ müssen von aussen auf die Kolben wirken.

Ist der Kolben C an der der Flüssigkeit zugekehrten Seite von einer krummen Fläche begrenzt, so hat der Umstand, dass diese grösser ist als die rechtwinklige Querschnittfläche des Kolbens und des Ansatzrohres keinen Einfluss auf die Grösse der *wirksamen* Kolbenkraft, wie folgende Überlegung zeigt: Betrachten wir die Mittellinie des Rohres als x-Achse, so möge die Druckkraft gegen ein Flächentheilchen dF mit der x-Richtung den Winkel α bilden. Es lässt sich $p \cdot dF$ zerlegen in eine Seitenkraft $p \cdot dF \cdot \cos\alpha$ in der x-Richtung, und in eine dazu rechtwinklige. Die letztere drückt den Kolben gegen die Wand der Ansatzröhre und wird durch deren Festigkeit aufgehoben. Wirksam gegen den Kolben, d. h. eine mögliche Bewegung anstrebend, ist nur die Seitenkraft $p \cdot dF \cdot \cos\alpha$. Derselbe Winkel α, den die Normale zu dF mit der x-Richtung bildet, findet sich auch zwischen der Fläche dF und der yz-Ebene, die rechtwinklig zur Achsenrichtung des Rohres steht. Daher ist $dF \cdot \cos\alpha$ die rechtwinklige Projektion von dF auf die Querschnitt-Ebene des Rohres, oder, wie man auch sagen kann, die rechtwinklige Projektion in der x-Richtung; wir bezeichnen dieselbe mit $dF_x = dF \cdot \cos\alpha$. Die gesammte Endfläche des Kolbens liefert daher einen wirksamen Druck

$$K_x = p \int dF_x = p \cdot F_x\,,$$

wenn F_x die rechtwinklige Querschnittfläche der Röhre oder die darauf rechtwinklige Projektion der Endfläche des Kolbens ist, wobei die Projektionsrichtung in die Achsenrichtung der Röhre fällt.

Auch wenn der Kolben, wie bei D, sich im Innern des Gefässes erweitert und über den cylindrischen Theil hinausragt, wird dadurch seine wirksame Kraft nicht geändert. Ein Flächentheilchen dF dieses überstehenden Theiles liefert in der x-Richtung eine Seitenkraft $p \cdot dF \cdot \cos\alpha = p \cdot dF_x$. Die projicirenden Linien, welche in der Richtung des Ansatzrohres von dem Umfange

des Flächentheilchens dF ausgehen, treffen die Oberfläche der Kolbenerweiterung aber noch ein Mal und scheiden aus ihr ein Flächentheilchen dF' heraus, welches eine Druckkraft $p \cdot dF'$ und eine Seitenkraft in der Richtung des Rohres $p \cdot dF' \cdot \cos \alpha' = p \cdot dF_x$ erfährt. Diese Seitenkraft ist der von dF gelieferten gleich und entgegengesetzt und hebt sich damit auf. In gleicher Weise liefern sämmtliche der Flüssigkeit ausgesetzte Oberflächentheile des Kolbens, die beim rechtwinkligen Projiciren in der Längenrichtung des Ansatzrohres paarweise auf einander fallen, keinen Beitrag zur wirksamen Kolbenkraft. Es bleibt als wirksame Druckfläche des Kolbens nur dessen rechtwinklige Querschnittfläche F_x mit der wirksamen Kolbenkraft

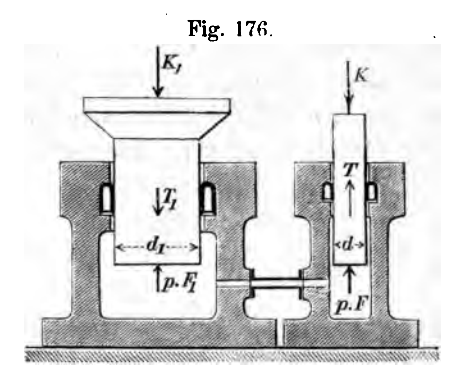
1) $$K_x = p \cdot F_x$$

übrig, auch geht K_x durch den Schwerpunkt von F_x, gerade so, als ob der Kolben dem Wasser eine rechtwinklige Querschnittfläche F_x als Endfläche zukehrte.

b) Wasserdruck-Presse.

Dieselbe hat den Zweck, mittels einer Triebkraft K einen bedeutend grösseren Widerstand K_1 zu überwinden. In die beiden mit einer tropfbaren Flüssigkeit gefüllten, durch ein Rohr verbundenen Cylinder (Fig. 176) reichen Kolben von den Durchmessern d und d_1 dicht schliessend hinein. Der dichte Schluss, die sog. Dichtung, wird durch je einen Lederstulp, einen Ring von hufeisenförmigem Querschnitte (Fig. 177) bewirkt, der sich mit den beiden Schenkeln an die Cylinderwand bezw. den Kolben legt und der in dem Hohlraume von dem Wasserdruck ergriffen wird, welcher die Schenkel auseinander zu treiben sucht. Je stärker der Wasserdruck, um so fester legt sich der Stulp an die zu dichtenden Theile.

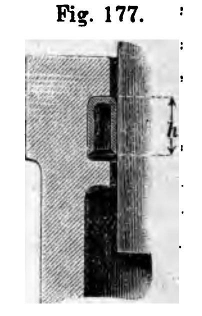
Fig. 176.



Bei dem Arbeiten der Presse bleibt nun der flüssige Körper nicht ganz im Gleichgewichte, da beim Niederdrücken des kleinen

Kolbens Flüssigkeit aus dem kleinen Cylinder in den grossen hinübertritt. Wenn wir aber annehmen, dass die Bewegung nur langsam erfolge, können wir annähernd mit den Gleichgewichts-Bedingungen und dem durchweg gleichen Druck p in der Presse rechnen.

Fig. 177.



Während der Kolben vom Durchmesser d an dem Stulp von der Höhe h abwärts gleitet, wird der letztere mit Kräften gegen den Kolben gedrückt, deren Summe $p \cdot d \cdot \pi \cdot h$ beträgt, also eine aufwärts gerichtete Reibung $T = f p d \pi h$ hervorruft. Für das Gleichgewicht dieses Kolbens gilt dann

$$K = p \cdot {}^1\!/\!_4\, d^2 \pi + f p d \pi h.$$

An dem grösseren Kolben vom Durchmesser d_1 sei die Stulphöhe h_1, dann beträgt die hier abwärts gerichtete Reibung $T_1 = f p d_1 \pi h_1$, und es gilt für diesen Kolben

$$K_1 = p\, {}^1\!/\!_4\, d_1{}^2 \pi - f p d_1 \pi h_1 .$$

Sonach wird

1) $$\frac{K_1}{K} = \frac{d_1{}^2}{d^2} \frac{1 - 4 f \dfrac{h_1}{d_1}}{1 + 4 f \dfrac{h}{d}} .$$

Bewegt sich der kleine Kolben um v abwärts, so muss eine Raummenge Wasser $= {}^1\!/\!_4\, d^2 \pi v$ in den grossen Cylinder übertreten und dessen Kolben um die Strecke c heben, so dass ${}^1\!/\!_4\, d^2 \pi v = {}^1\!/\!_4\, d_1{}^2 \pi c$ und die Geschwindigkeit-Übersetzung $v : c = d_1{}^2 : d^2$ ist. Der Wirkungsgrad wird demgemäss

$$\eta = \frac{K_1 c}{K v} = \frac{1 - 4 f \dfrac{h_1}{d_1}}{1 + 4 f \dfrac{h}{d}} = \frac{K_0}{K} ,$$

wenn $K_0 = K_1 \dfrac{d^2}{d_1{}^2}$ die für eine vollkommene Presse ohne Reibung ($f = 0$) erforderliche Triebkraft wäre.

Beispiel: Für $h : d = h_1 : d_1 = 0{,}2$, $d_1 : d = 18$ und $f = 0{,}12$ ist

$$\eta = \frac{1 - 4 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}2}{1 + 4 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}2} = 0{,}825 ;$$

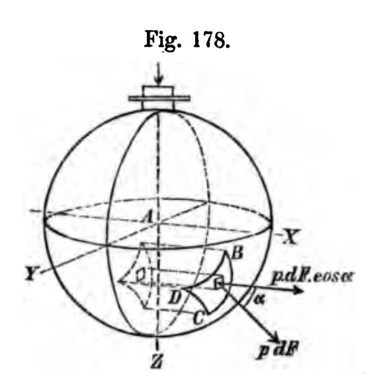
die Wasserdruckpresse arbeitet also erheblich günstiger als Keil- und Schraubenpressen (1. Theil, 2. Aufl., S. 219 und 268). Es wird $K_1 : K = 18^2 \cdot 0{,}825 = 267{,}3$.

Die Übersetzung ist eine sehr erhebliche und kann durch Wahl von $d_1 : d$ beliebig festgesetzt werden Hier würde mit einer Triebkraft $K = 100$ kg eine Nutzkraft $K_1 = 26\,730$ kg erreicht werden.

c) Druckkraft auf ein beliebiges Stück der Gefässwand.

Soll das Gesammt-Ergebnis der Druckkräfte auf ein Stück BCD (Fig. 178) der Wandung eines Gefässes, in dem der Druck p herrscht, bestimmt werden, so bedenke man, dass ein Flächentheilchen die Druckkraft $p \cdot dF$ erfährt, die mit drei rechtwinkligen Achsen die Winkel α, β, γ bilden möge. Dann bekommt man gerade so, als ob BCD die Endfläche eines in der x-Richtung verschiebbaren Kolbens wäre, in dieser Achsenrichtung eine gesammte Kraft

Fig. 178.



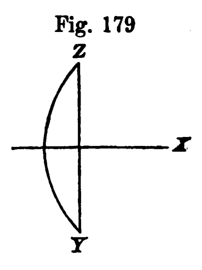
1) $D_x = p\, \Sigma\, dF \cdot \cos\alpha = p \cdot F_x$,

ebenso in den beiden anderen Achsenrichtungen

2) $$D_y = p\, \Sigma\, dF \cdot \cos\beta = p \cdot F_y,$$
$$D_z = p\, \Sigma\, dF \cdot \cos\gamma = p \cdot F_z.$$

Darin bezeichnen F_x, F_y und F_z die Projektionen der gedrückten Flächen auf die yz-, die xz- und die xy-Ebene, oder die rechtwinkligen Projektionen in den Richtungen der x-, der y- und der z-Achse, wobei die etwa paarweise aufeinander fallenden Projektionen von Flächentheilchen fortzulassen sind. Die Seitenkräfte gehen durch die Schwerpunkte der entsprechenden Projektionsflächen F_x, F_y und F_z hindurch und werden sich im Allgemeinen nicht zu einer Einzelkraft zusammensetzen lassen, sondern daneben noch ein Achsenmoment liefern. Gehört die Fläche freilich einer Kugel an, so gehen die einzelnen Kräfte $p \cdot dF$ sämmtlich durch deren Mittelpunkt und liefern eine durch denselben Punkt gehende Einzelkraft.

Fig. 179



Auch noch in solchen Fällen, wo die Begrenzungslinie des Flächenstückes eine ebene Kurve ist, lassen sich die Druckkräfte zu einer Einzelkraft D zusammensetzen. Legt man dann nämlich

die yz-Ebene in die Ebene dieser Kurve (Fig. 179), so heben sich beim Projiciren in der y- und in der z-Richtung die Flächen gegenseitig auf, weil sie sämmtlich paarweise auf einander fallen. Es ist $F_y = F_z = 0$, daher auch $D_y = D_z = 0$, mithin der Gesammtdruck

4) $$D = D_x = p F_x.$$

Darin ist F_x die ebene Fläche der Umgrenzungslinie, und D geht durch deren Schwerpunkt.

d) Wandstärke von Gefässen und Röhren.

Wird ein kugelförmiges Gefäss (Fig. 180) vom Halbmesser r und der Wandstärke δ nach einem grössten Kreise durchschnitten, so übt die darin befindliche Flüssigkeit, bei einem Drucke p für die Flächeneinheit, auf die eine Halbkugelfläche eine Kraft D aus, welche nach vorstehender Gl. 4, mit $F_x = r^2\pi$, sein muss:

Fig. 180.

$$D = p r^2 \pi.$$

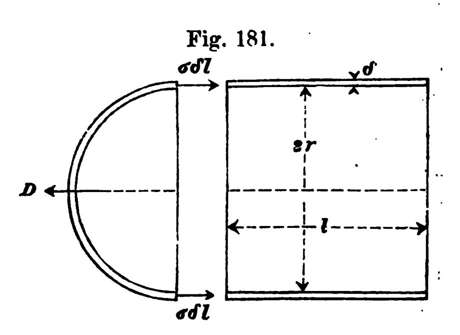
Diese Kraft muss durch die Spannkräfte der ringförmigen Schnittfläche im Gleichgewichte gehalten werden.

Hinsichtlich der Spannungen in der Wand werde hier die vereinfachende Annahme gemacht, dass sie sich gleichmässig über die Dicke δ vertheilen und überall den Werth σ haben. Da nun die Schnittfläche $= 2r\pi\delta$ ist, so wird:

$$2r\pi \cdot \delta \cdot \sigma = p \cdot r^2 \pi \quad \text{oder}$$

1) $$\delta = \frac{r}{2}\frac{p}{\sigma}.$$

Fig. 181.



Eine cylindrische Röhre (Fig. 181) vom Halbmesser r, der Wandstärke δ, dem innern Drucke p, der Länge l erfährt die stärksten Spannungen an irgend einer durch ihre Achse gelegten Schnittebene. Für die

gesammte Druckkraft gegen die eine Hälfte ist die Fläche $F_x = 2rl$ massgebend mit $D = 2prl$. Unter der auch hier gemachten Voraussetzung überall gleicher Spannung σ (vgl. unten) ergiebt sich an jeder der beiden Schnittflächen die Spannkraft $\sigma \cdot \delta \cdot l$, daher wird

$$2\sigma \cdot \delta \cdot l = 2p \cdot r \cdot l, \quad \text{und}$$

2) $$\delta = r\frac{p}{\sigma}.$$

d. h. doppelt so gross wie beim kugelförmigen Gefässe.

Gl. 2 ist wahrscheinlich zuerst von Mariotte angegeben worden.

Die Formeln 1 und 2 geben für kleine Werthe von p so geringe Wandstärken, wie sie aus Gründen der Herstellung und Handhabung nicht zulässig sind. Daher fügt man jenen noch einen Zusatzwerth $+ c$ bei, der sich nur nach Ausführungs-Rücksichten bestimmt. Bei Gefässen und Röhren aus Gusseisen beträgt etwa

3) $$c = 0{,}7^{\text{cm}}.$$

Beispiel: Soll ein gusseisernes Wasserleitungsrohr von $r = 20^{\text{cm}}$ auf einen inneren Druck $p = 10^{\text{at}}$ berechnet werden, und wählt man wegen der in einer Wasserleitung unvermeidlichen Stöfse die Spannung σ nur $= 250^{\text{at}}$, so wird nach Gl. 2 und 3

$$\delta = 20\frac{10}{250} + 0{,}7 = 1{,}5^{\text{cm}}.$$

Gültigkeitsgrenze für Gl. 1 bis 3. Diese Formeln gelten nur für kleine Werthe von $p:\sigma$. Für grössere Drücke, wie sie bei den Cylindern von Wasserdruckpressen und besonders bei Kanonenrohren vorkommen, ist die Voraussetzung überall gleicher Spannung selbst annäherungsweise nicht mehr zutreffend, vielmehr ergeben genauere Rechnungen, dass die Spannung an der Innenseite des Rohres stets grösser ist als an den übrigen Stellen. Kanonenrohre erleiden denn auch die ersten Risse stets an der Innenwandung, und man untersucht sie daraufhin mittels eines Spiegels, um sie rechtzeitig ausser Gebrauch setzen zu können.

Bemerkung. Die bisherigen Entwicklungen galten (mit Ausnahme der Wasserdruckpresse) vereint für tropfbare und gasförmige Körper. Da bei den weiteren Betrachtungen aber auch die Schwere zu berücksichtigen ist, und zwischen den tropfbaren und gasförmigen Körpern der wesentliche Unterschied besteht, dass erstere eine unveränderliche, letztere aber eine sehr veränderliche Dichte haben, so müssen weiterhin die tropfbaren und die gasförmigen Körper getrennt behandelt werden. Wir wollen zunächst die tropfbaren Körper, die nach S. 165 als nicht zusammendrückbar betrachtet werden können, besprechen.

2. Gleichgewicht tropfbar-flüssiger Körper unter Einwirkung der Schwere.

a) Wasserspiegel. Druck in der Flüssigkeit.

Soll die in einem oben offenen Gefässe befindliche Flüssigkeit unter Einwirkung der Schwere, als einziger Massenkraft, im Gleichgewichte sein, so muss die obere freie Fläche, — der Wasserspiegel, — eine wagerechte Ebene bilden, d. h. rechtwinklig zu der herrschenden Massenkraft stehen.

Um dies zu beweisen, nehmen wir zunächst den Gleichgewichtszustand bei beliebiger noch unbestimmter Oberfläche AB (Fig. 182) an. Von einem beliebigen Punkte P im Innern ausgehend, umgrenzen wir ein Wasserprisma PQ, von der Länge l und der Neigung α gegen die Wagerechte. Der Querschnitt des Prismas sei dF, sein Gewicht $\gamma \cdot dF \cdot l$.

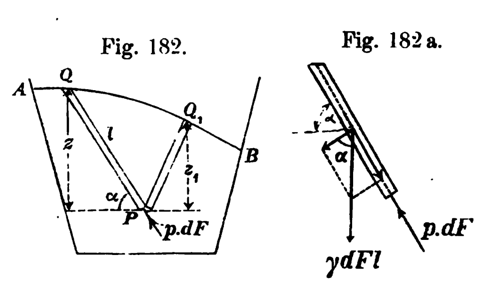


Fig. 182. Fig. 182 a.

Ist p der Druck im Punkte P, so wirkt hier eine Längskraft $p \cdot dF$ auf das Prisma. Denkt man sich das Prisma erstarrt, und die umgebende Flüssigkeit ihrerseits auch, wobei aber an den Langflächen, entsprechend der Natur der flüssigen Körper, nur Normaldrücke auftreten können, so liefert das Gewicht $\gamma \cdot dF \cdot l$ in der Längsrichtung des Prisma gemäss der Zerlegung (Fig. 182a) die Seitenkraft $\gamma \cdot dF \cdot l \cdot \sin\alpha$, und wenn die Oberfläche keinen Druck erfährt, muss

$$p \cdot dF = \gamma \cdot dF \cdot l \cdot \sin\alpha$$

sein. Wird der Höhenunterschied der beiden Punkte P und Q, d. h. $l \sin\alpha = z$ gesetzt, so folgt

$$p = \gamma z. \tag{1}$$

Wenn man nun von P aus nach einem anderen Punkte Q_1 der Oberfläche ein Prisma PQ_1 abtrennt, so erhält man für dessen Gleichgewicht ebenso $p_1 = \gamma z_1$. Da sich die Flüssigkeit im Gleichgewicht befinden soll, muss nach S. 166 der Druck im Punkte P

nach allen Richtungen PQ, PQ_1 ... derselbe, somit $p = p_1$ und daher auch $z = z_1$ sein: d. h. die Höhe der verschiedenen Punkte der Oberfläche über der Wagerechten, die durch irgend einen Punkt im Innern der Flüssigkeit gezogen wird, muss die gleiche sein, **der Wasserspiegel muss also eine wagerechte Ebene bilden.**

Gl. 1 enthält das Gesetz des Druckes für eine im Gleichgewichte befindliche Flüssigkeit unter Einwirkung der Schwere. Eine Flüssigkeitssäule von der Grundfläche $= 1^{qm}$ und der Höhe $= z^m$ hat ein Gewicht γz, wenn γ das Gewicht von 1^{cbm} bedeutet, und bringt dadurch den Druck $p = \gamma z$ hervor. Man nennt deshalb auch $z = p : \gamma$ die auf eine Flüssigkeit von der Dichte γ bezogene **Druckhöhe**.

Ist z. B. γ in $^t/_{cbm}$ ausgedrückt, so erhält man p in $^t/_{qm}$ und $z = p : \gamma$ in ^{m}. Um p in ^{at} auszudrücken, ist aber $^1/_{10}$ des Werthes p zu nehmen. Einer Druckhöhe von z^m entspricht daher ein Druck von $\gamma \cdot z \, ^t/_{qm} = {}^1/_{10} \, \gamma \cdot z^{at}$.

Eine wagerechte Ebene im Innern der Flüssigkeit hat an allen Stellen dieselbe Tiefe unter dem Wasserspiegel, ist daher eine **Fläche überall gleichen Druckes**, eine sog. **Niveau-Fläche**.

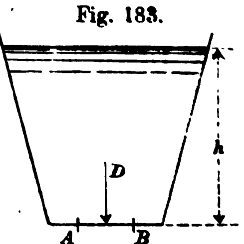


Fig. 183.

Auf eine wagerechte Bodenfläche (Fig. 183) vertheilt sich der Druck gleichmässig. Ein Bodenstück AB von der Fläche F in der Tiefe h unter dem Wasserspiegel erfährt eine Druckkraft D, die durch den Schwerpunkt der Fläche F hindurchgeht. Diese Kraft ist unabhängig von der Form des Gefässes und der Menge des Wassers in demselben, und nur abhängig von der Höhenlage des Wasserspiegels. Mittels eines engen Rohres (Fig 184), welches sich an die Decke eines Gefässes anschliesst, kann man, wenn man Gefäss und Rohr mit Wasser füllt, gegen den Boden AB vom Flächeninhalt F eine Druckkraft $D = \gamma \cdot F \cdot h$, d. h. gleich dem Gewichte eines Wasserkörpers ABB_1A_1, ausüben. Die Decke CE des Gefässes erfährt dagegen eine aufwärts gerichtete Druckkraft D_1 = dem Gewichte eines Wasserprismas, das, über

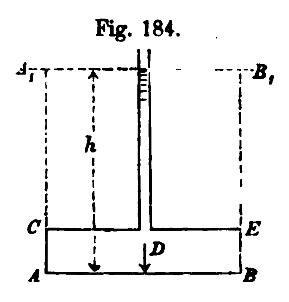
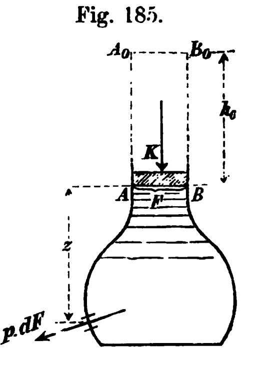


Fig. 184.

der Decke stehend, bis zur Höhe $A_1 B_1$ reicht. Der Druck D_1 hat das Bestreben, Decke und Seitenwände des Gefässes von der Bodenwand nach oben hin abzureissen. Die Mittelkraft von D und D_1 ist dann das Gewicht der wirklich vorhandenen Wassermenge.

Ist (Fig. 185) der Wasserspiegel von dem Flächeninhalte F nicht frei, sondern wird auf ihn, vielleicht mittels eines Kolbens, eine Kraft K übertragen, entsprechend einem Drucke $p_0 = K : F$ und einer Druckhöhe $h_0 = p_0 : \gamma$, so kann man, weil es für die Wirkung einer Kraft gleichgültig ist, ob sie durch einen Kolben oder durch das Gewicht einer Wassermasse erzeugt wird, die Wirkung des Kolbens auch ersetzen durch Höherlegung des Wasserspiegels um die Grösse h_0. Man denkt sich also die wahre Oberfläche AB mit dem darauf lastenden Kolben ersetzt durch die ideelle freie Oberfläche $A_0 B_0$ und kann alle Druckverhältnisse im Gefäss auf diese beziehen. In einer Tiefe z unter AB herrscht dann ein Druck $p = \gamma(z + h_0)$.

Fig. 185.



b) Druckkraft gegen eine ebene Seitenwand. Druckmittelpunkt.

Das ebene Wandstück GE (Fig. 186) erfährt über seine ganze Fläche F parallele Druckkräfte, die stetig, aber ungleichmässig vertheilt sind. Auf ein Flächentheilchen dF in der Tiefe z unter dem Wasserspiegel kommt die Kraft

Fig. 186.

1) $$dD = \gamma \cdot dF \cdot z,$$

mithin wird die gesammte Druckkraft

$$D = \gamma \Sigma dF \cdot z,$$

wofür man nach der Lehre vom Schwerpunkte (1. Theil, 2. Aufl., S. 137, Gl. 6) schreiben kann

2) $$D = \gamma F z_0,$$

wenn z_0 die Tiefe des Schwerpunktes S von F unter dem Wasserspiegel bedeutet. Die Druckhöhe z_0 des Schwerpunktes von F ist also die mittlere Druckhöhe für die ganze

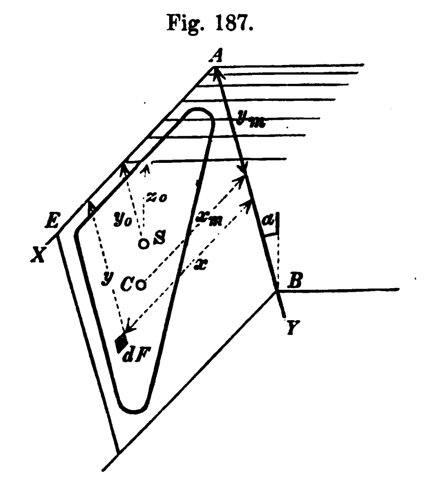
Fläche, nach welcher die Grösse der gesammten Druckkraft D berechnet werden kann.

Vertheilten sich die Kräfte **gleichmässig** über F, so ginge die Mittelkraft D durch den Schwerpunkt S der Fläche, da aber der Druck p mit der Tiefe z zunimmt, so muss D tiefer liegen als der Schwerpunkt S der Fläche.

Derjenige Punkt C, in welchem die Druckkraft D die Fläche F schneidet, heisst der **Druckmittelpunkt.**

Um ihn zu finden, benutzen wir Fig. 187. In der Seitenwand ABE ist ein Flächenstück F abgegrenzt. Der Wasserspiegel schneide die Wand in der wagerechten Geraden AX; rechtwinklig dazu liegt in der Fläche die Achse AY, welche mit der Lothrechten den Winkel α bilde. Ein Flächentheilchen dF habe die Koordinaten x und y, dann ist seine lothrechte Tiefe unter Wasser $z = y \cos \alpha$. Ebenso gilt für die lothrechte Tiefe z_0 des Schwerpuntes S unter Wasser, wenn y_0 seine parallel mit AY gemessene Ordinate ist,

Fig. 187.



$$z_0 = y_0 \cos \alpha .$$

Der gesuchte Druckmittelpunkt C habe die Koordinaten x_m und y_m. Es muss nun nach 1. Theil, 2. Aufl., S. 124, in Bezug auf irgend eine Achse das Moment der Mittelkraft D gleich der Momentensumme der Einzelkräfte dD sein. Dies giebt für die Achse $AX: Dy_m = \int dD \cdot y$ oder mit Hülfe von Gl. 1 und 2:

$$\gamma F y_0 \cos \alpha \cdot y_m = \gamma \cos \alpha \int dF \cdot y^2 .$$

Da nun $\int dF y^2$ das **Trägheitsmoment** J_x der Fläche F in Bezug auf die Wasserspiegelachse AX bedeutet, Fy_0 aber das **statische** Moment S_x derselben Fläche auf dieselbe Achse, so wird

$$3) \qquad y_m = \frac{J_x}{S_x} = \frac{\int dF \cdot y^2}{F y_0} .$$

Dies ist (1. Theil, 2. Aufl., S. 283) die Schwingungslänge der Fläche F, falls sie als eine materielle Fläche um die Achse AX als Pendel schwingend gedacht wird.

Für die Achse AY ergiebt sich

$$D x_m = \int dD \cdot x \quad \text{oder}$$

$$\int F y_0 \cos\alpha\, x_m = \gamma \cos\alpha \int dF \cdot xy.$$

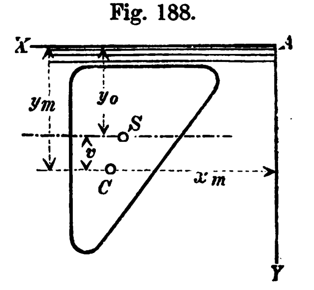
$\int dF \cdot xy$ ist aber das Centrifugalmoment C_{xy} der Fläche F (1. Theil, 2. Aufl., S. 293) somit

$$4) \qquad x_m = \frac{C_{xy}}{S_x} = \frac{\int dF \cdot xy}{F y_0}.$$

Die Lage des Druckmittelpunktes C ist durch die Gl. 3 und 4 bestimmt; der Winkel α kommt darin nicht vor; wenn sich daher die Seitenwand um die Wasserspiegelachse AX dreht, so behält der Druckmittelpunkt C in ihr seine Lage bei. Wir nehmen daher im Folgenden den Winkel $\alpha = 0$ an, betrachten also die Seitenwand als lothrecht, so dass dann $z = y$ wird.

Legt man durch den Schwerpunkt S (Fig. 188) eine wagerechte Achse und nennt v den rechtwinkligen Abstand des Druckmittelpunktes C von der Schwerpunktsachse, so ergiebt sich aus Gl. 3, weil $J_x = J_S + F y_0^2$ (1. Theil, 2. Aufl., S. 272)

Fig. 188.



$$y_0 + v = \frac{J_S + F y_0^2}{F y_0} = \frac{J_S}{F y_0} + y_0,$$

$$5) \qquad \text{also} \quad v = \frac{J_S}{F y_0}.$$

Erleidet nun der Wasserspiegel eine Parallelverschiebung nach oben, so bleibt J_S unverändert; mit zunehmendem y_0 wird aber v kleiner und kleiner; für $y_0 = \infty$ wird $v = 0$. Dies ist auch selbstverständlich, da, wenn die Fläche in unendlicher Tiefe liegt, die Druckvertheilung an ihr als gleichmässig angesehen werden kann.

Die Lage der AY war bisher beliebig. Ist diese Achse eine Symmetrieachse für die Figur F, so wird $C = \int dF \cdot xy = 0$ (1. Theil, 2. Aufl., S. 294) und damit auch $x_m = 0$. Es liegt dann der Druckmittelpunkt auf dieser Symmetrie-Achse.

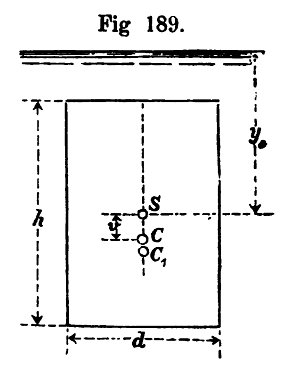
c) Druckkraft gegen eine rechteckige Seitenwand.

Für das Rechteck (Fig. 189) ist (1. Theil, 2. Aufl., S. 275) $J_S = {}^1/_{12} F h^2$, daher nach Gl. 5, S. 180

1) $$v = \frac{h^2}{12 y_0}.$$

Der Druckmittelpunkt liegt auf der lothrechten Mittellinie des Rechtecks. Wird $y_0 = \infty$, so wird $v = 0$; rückt der Wasserspiegel aber abwärts, und zwar so weit, dass er die Oberkante des Rechtecks trifft, so ist $y_{0\,min} = {}^1/_2 h$, dafür wird $v_{max} = {}^1/_6 h$, d. h. der Druckmittelpunkt liegt dann bei C_1 im unteren Drittelpunkte der lothrechten Mittellinie der Fläche. Wasserspiegel und Druckmittelpunkt bewegen sich hiernach stets in demselben Sinne; beide nach oben oder beide nach unten. Während aber der Wasserspiegel von der Oberkante des Rechteckes bis zu $y_0 = \infty$ nach oben rückt, verschiebt sich der Druckmittelpunkt C dieser Wandfläche nur um ${}^1/_6 h$ von der tiefsten Lage nach ihrem Schwerpunkte.

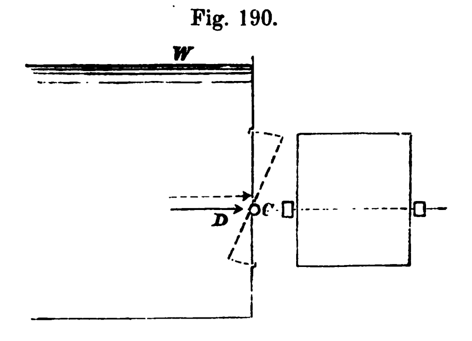
Fig 189.



Beispiel: $d = 1^m$, $h = 3^m$, $y_0 = 2^m$, giebt $F = 3^{qm}$; ist γ das Gewicht von 1^{cbm} Wasser $= 1000^{kg}$, so wird $D = 1000 \cdot 3 \cdot 2 = 6000^{kg}$, und

$$v = \frac{9}{12 \cdot 2} = \frac{3}{8}{}^m.$$

Fig. 190.



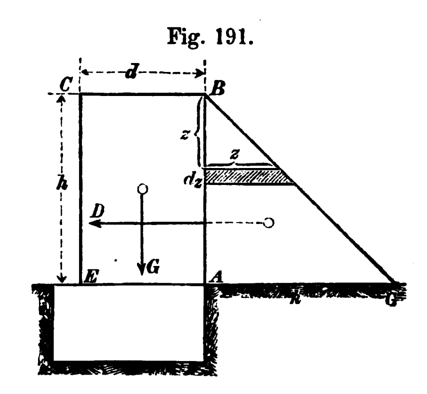
Selbstthätige Klappe. Das Verhalten des Druckmittelpunktes bei steigendem Wasserspiegel kann benutzt werden für eine Klappe, die sich selbstthätig öffnet, sobald der Wasserspiegel eine bestimmte Höhenlage überschreitet, indem man durch den zu der Grenzlage W des Wasserspiegels gehörigen Druckmittelpunkt C (Fig. 190) eine wagerechte Drehachse für die rechtwinklige Klappe legt. So lange der Wasserspiegel unterhalb W verbleibt, bleibt auch die Druckkraft D unterhalb

der Achse C und drückt die Klappe gegen die obere und untere Anschlagfläche. Überschreitet der Wasserstand aber die Grenze W, so rückt D in die punktirte Lage oberhalb C, öffnet die Klappe und lässt das Wasser abfliessen.

d) Druck gegen eine ebene Mauerfläche oder Bohlwand.

Ist die Mauer $ABCE$ (Fig. 191) auf der rechten Seite bis zur Oberkante mit Wasser in Berührung und betrachtet man ein Längenstück der Mauer $= 1^{\text{m}}$, rechtwinklig zur Bildebene, so haben wir als gedrückte Fläche ein Rechteck von der Breite 1 und der Höhe h; der Wasserspiegel geht durch die Oberkante der Druckfläche, daher geht D (nach S. 181) durch den unteren Drittelpunkt der lothrechten Mittellinie der Fläche. In einer Tiefe z beträgt die auf die Einheit der Höhe kommende Kraft $p = \gamma z$. Setzt man $\gamma = 1^{\text{t}} = 1$, so wird $p = z$ und die Darstellung des veränderlichen p erfolgt durch eine unter 45^0 geneigte Gerade BG. Die Druckraft auf ein Höhentheilchen dz ist daher

Fig. 191.



$$dD = z\,dz,$$

und gleich dem wagerechten Flächenstreifen des gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks ABG. Die Gesammtkraft D wird dargestellt durch die Fläche des Dreiecks $\frac{1}{2}h^2$ und greift in der Höhe des Schwerpunktes dieser Fläche an.

$D = \frac{1}{2}\gamma h^2$ liefert in Bezug auf die Aussenkante E der Mauer das Umsturzmoment

1) $$D \cdot \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}\gamma h^3,$$

während bei einer Dichte γ_1 des Mauerwerks das Sicherheitsmoment (1. Theil, 2. Aufl., S. 167)

2) $$G \cdot \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}\gamma_1 d^2 h$$

beträgt. Die Sicherheit der Mauer gegen Kanten erfordert:

$$\frac{1}{2}\gamma_1 d^2 h > \frac{1}{6}\gamma h^3 \quad \text{oder}$$

3) $$\frac{d}{h} > \sqrt{\frac{1}{3}\frac{\gamma}{\gamma_1}}.$$

Der Verschiebung der Mauer durch $D = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot h^2$ setzt sich die Reibung $f \cdot G = f \cdot \gamma_1 \cdot d \cdot h$ entgegen (f = Reibungsziffer), mithin muss auch sein:

$$f \gamma_1 d \cdot h > \frac{1}{2} \gamma h^2, \quad \text{d. h.}$$

4) $$\frac{d}{h} > \frac{1}{2f} \frac{\gamma}{\gamma_1}.$$

Hat das Mauerwerk keine erhebliche Zugfestigkeit und soll ein Öffnen der Fugen vermieden werden, so muss die Mittelkraft aus D und G die untere Fuge AE in einem Punkte schneiden, der nicht ausserhalb des mittleren Drittels der Mauerstärke $AE = d$ liegt. (Den Beweis hierfür s. Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, S. 301). Soll der Angriffspunkt dieser Mittelkraft gerade an der Grenze des mittleren Drittels, d. h. um $\frac{1}{6} d$ von der Mitte entfernt liegen, so muss nach Fig. 192 die Beziehung stattfinden:

Fig. 192.

$$\frac{1}{6} d : \frac{1}{3} h = \operatorname{tg} \alpha = D : G, \quad \text{oder}$$

5) $$\frac{d}{h} = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}}.$$

Beispiel: Für $\gamma_1 = 2\gamma$ und $f = 0{,}6$ geben die Gleichungen

3) $d > h\sqrt{1{,}6}$, oder $d > 0{,}41\, h$;

4) $d > 0{,}42\, h$;

5) $d = 0{,}7\, h$.

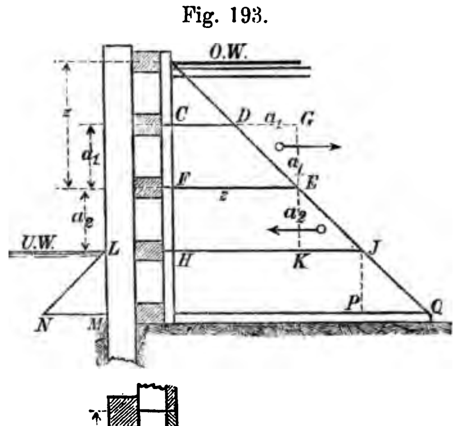
Die letztere Bedingung erfordert also eine bedeutende Stärke.

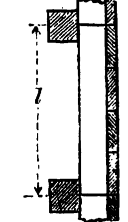
Eine Bohlenwand (Fig. 193) stütze sich gegen wagerechte Balken, sog. Riegel, die, auf eine Spannweite l frei liegend, sich wiederum gegen lothrechte Pfähle legen. Die mit Bohlen überdeckten Riegel werden gleichmässig über ihre Länge belastet; es soll für einen um z unter Wasser liegenden Riegel F die Belastung q für die Längeneinheit ermittelt werden.

Die beiden benachbarten Riegel mögen von dem betrachteten um a_1 und a_2 abstehen. Hinsichtlich der Kraftübertragung denken wir uns die Bohlen an jedem Riegel durchschnitten; sie wirken dann als statisch bestimmte Träger auf zwei Stützen. Für das Bohlenstück $CF = a_1$ von der Länge Eins, rechtwinklig zur Aufrissfigur, bildet die noch

mit γ multiplicirte Trapezfläche $CDEF$ die Belastungsfigur. Man kann diese ansehen als Unterschied des Rechtecks $CGEF$ und des Dreiecks DGE. Ersteres, von dem Inhalte $z a_1$, bringt nach dem Riegel bei F den Auflagerdruck $^1/_2 \gamma z a_1$, letzteres, vom Inhalte $^1/_2 a_1{}^2$, wirkt nur zu einem Drittel auf F, u. zw. entlastend, d. h. mit $- {}^1/_6 \gamma a_1{}^2$. Für das Bohlenstück FH ist $FEJH$ die Belastungsfigur, deren Inhalt in die beiden Theile zerfällt $z a_2 + {}^1/_2 a_2{}^2$. Hieraus ergiebt sich für das Bohlenstück FH bei F ein Auflagerdruck $^1/_2 \gamma z a_2 + {}^1/_6 \gamma a_2{}^2$

Fig. 193.





Daher kommt auf die Längeneinheit des Riegels die Druckkraft

$$q = {}^1/_2 \gamma z a_1 - {}^1/_6 \gamma a_1{}^2 + {}^1/_2 \gamma z a_2 + {}^1/_6 \gamma a_2{}^2,$$

1) $$q = {}^1/_2 \gamma (a_1 + a_2)\left\{z - {}^1/_3 (a_1 - a_2)\right\}.$$

Sind die Riegel in gleichen Abständen $a_2 = a_1 = a$, so wird

2) $$q = \gamma a z.$$

Ist der untere Theil der Wand, von L beginnend, auch auf der linken Seite (Fig. 193) mit Wasser in Berührung, so übt dieses einen Druck aus, dessen Vertheilung durch das Dreieck LMN dargestellt wird. Dieser Gegendruck des Unterwassers (*U. W.*) lässt sich von dem Drucke des Oberwassers (*O. W.*) leicht abziehen, da $LMN = JPQ$ ist. Unterhalb des Unterwasserspiegels ist also der Überdruck $p = \gamma h$, wenn h der Höhenunterschied der beiden Wasserspiegel ist, und es wird für jeden unter *U. W.* liegenden Riegel

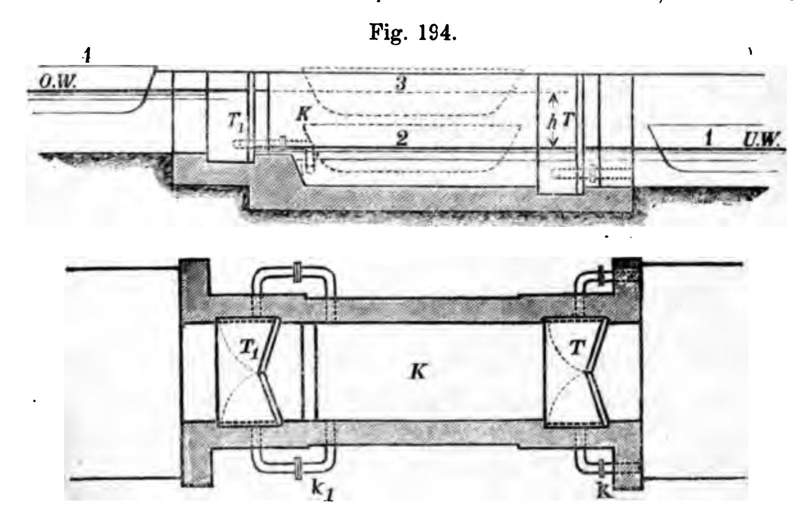
3) $$q = \gamma a h.$$

e) Berechnung der Riegel des Stemmthores einer Schleuse.

Eine Schiffschleuse (Fig. 194) dient zum Heben eines Schiffes aus einer Kanalhaltung mit dem Wasserstand *U. W.* in eine andere mit höherem Wasserstande *O. W.*, oder zum Senken eines Schiffes von *O. W.* bis *U. W.* Sie besteht aus den Oberthoren T_1 und den Unterthoren T mit einer dazwischenliegenden Kammer K, welche durch verschliessbare Kanäle k_1 und k mit *O. W.* oder *U. W.* verbunden werden kann.

Soll ein Schiff (Lage 1) aus *U. W.* nach *O. W.* befördert werden, so schliesst man die oberen Kanäle k_1 und öffnet die unteren k, wodurch der

Fig. 194.



Wasserstand in der Kammer K auf die Höhe von *U. W.* gesenkt wird; nun kann man das Unterthor T leicht öffnen, da es von beiden Seiten gleichen Wasserdruck hat, und das Schiff in die Kammer (Lage 2) ziehen. Dann schliesst man das Unterthor T und die unteren Kanäle k, öffnet die oberen k_1, wodurch Wasser in die Kammer einströmt, bis deren Wasserstand in gleicher Höhe mit *O. W.* steht. Hierbei wird das schwimmende Schiff mit dem Wasserspiegel um h gehoben (Lage 3). Jetzt kann das Oberthor T_1 leicht geöffnet und das Schiff aus der Kammer nach *O. W.* (Lage 4) übergeführt werden.

Die Thore sind zweiflügelig. Jeder Flügel dreht sich um eine lothrechte, an einer Seitenwand liegende Achse; seine Länge ist etwas grösser als die halbe Weite der Kammer. Beide Flügel fallen daher, wenn sie sich in der Mitte der Schleuse berühren, nicht in dieselbe Ebene, sondern bilden mit einander einen stumpfen, nach dem Oberwasser gekehrten Winkel. Der höhere Wasserstand auf der *O. W.*-Seite presst daher die Flügel selbstthätig zusammen; die Flügel stemmen sich gegen einander und gegen die Seitenwände, und heissen deshalb S t e m m t h o r e. Im Grundrisse der Fig. 194 sind die Thore im geschlossenen Zustande ausgezogen, im offenen punktirt; die Kreisbogen bezeichnen die Drehungswege der Flügelenden.

Der Flügel eines hölzernen Stemmthores (Fig. 195 Ansicht, Fig. 196 Grundriss) hat nun hinsichtlich der Kraftleistung einige Verwandtschaft mit einem Fach der bei Fig. 193 besprochenen Bohlwand; nur tritt das Aneinanderstemmen neu hinzu.

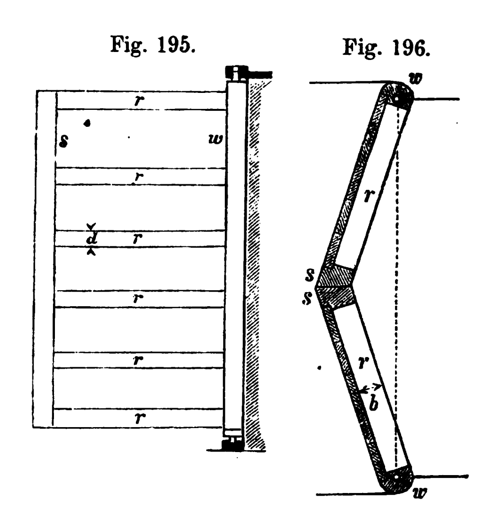
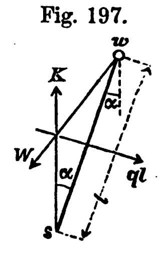


Fig. 195. Fig. 196.

Das Rahmenwerk besteht aus der Drehsäule (Wendesäule) w, der Schlagsäule s und den wagerechten Riegeln r, die an der Oberwasser-Seite mit Bohlen bekleidet sind. Die Spannweite l eines Riegels ist zu rechnen von der Achse der Wendesäule bis zur Schleusenmitte. Seine Belastung für die Längeneinheit ist nach Gl. 2 oder 3 (S. 184) zu bemessen. Die gegenseitige Druckkraft K, welche die unter dem Winkel $180^0 - 2\alpha$ (Fig. 197) gegen einander gepressten Riegel durch Vermittelung der Schlagsäulen auf einander ausüben, muss rechtwinklig zur lothrechten Mittelebene der Schleuse sein. Ausserdem wirkt an den Riegeln der Widerstand W der Wendesäule und die Last ql. Diese drei Kräfte müssen sich im Gleichgewichte halten, also durch einen Punkt gehen. In Bezug auf die Wendesäule wird $Kl \sin \alpha = \frac{1}{2} q l^2$, mithin $K = \frac{ql}{2 \sin \alpha}$, und ebenso gross ist auch W, weil K und W symmetrisch zur Mitte des Riegels liegen.

Fig. 197.



Man kann nun (Fig. 198) K zerlegen in $K \cos \alpha$ und $K \sin \alpha$. Letztere Seitenkraft, gleich $\frac{1}{2} q l$, entspricht dem Auflagerdruck eines einfachen Balkens mit der Belastung q, erzeugt mit ihr ein grösstes Biegungsmoment in der Mitte $= \frac{1}{8} q l^2$, und eine Biegungsspannung

$$1) \qquad \sigma_1 = \frac{\frac{1}{8} q l^2}{\frac{1}{6} d b^2} = \frac{3}{4} \frac{q l^2}{d b^2},$$

wenn d die lothrechte, b die wagerechte Abmessung des rechtwinkligen Riegelquerschnitts ist.

Fig. 198.

Die Kraft $K \cos \alpha = \frac{1}{2} q l \cot \alpha$ soll für den Riegel als einfache Druckkraft längs seiner Mittellinie angesehen werden, da wegen der meist starken Querschnitts-Abmessungen der Riegel eine erhebliche Ausbiegung derselben nicht anzunehmen ist. Hiernach ergiebt sich eine überall gleiche Druckspannung

2) $$\sigma_2 = \frac{q l \cot \alpha}{2 d b}.$$

Da die Biegungsspannung σ_1 auf der *O.W.*-Seite als Druck auf der *U.W.*-Seite als Zug auftritt, so wird die stärkste Spannung

3) $$\mp \sigma = \sigma_1 \pm \sigma_2 = \frac{q l}{2 d b}\left(\frac{3}{2}\frac{l}{b} \pm \cot \alpha\right).$$

Beispiel: Für eine Schleuse von 6,3 m Weite sei $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{6}$, $l = 3{,}2$ m $= 320$ cm, $h = 2$ m, $a = 0{,}9$ m, $d = 20$ cm, $b = 40$ cm. Dann ist für jeden unter *U.W.* liegenden Riegel (nach Gl. 3, S. 184)

$$q = 1000 \cdot 0{,}9 \cdot 2 = 1800 \text{ kg/m},$$

und $$q l = 1800 \cdot 3{,}2 = 5760 \text{ kg}.$$

Um σ in at zu erhalten, führen wir d, b und l in cm ein, also nach Gl. 3:

$$-\sigma = \frac{5760}{2 \cdot 20 \cdot 40}\left(\frac{3}{2}\frac{320}{40} + 6\right) = 3{,}6\,(12 + 6) = 64{,}8 \text{ at Druck}$$

und $$+\sigma = 3{,}6\,(12 - 6) = 21{,}6 \text{ at Zug}.$$

Die Spannungsvertheilung im Querschnitte ist also eine sehr ungleichmässige.

f) Druckmittelpunkt eines Dreiecks, eines Kreises, eines Viertelkreises.

1. Dreieck. α) Grundlinie oben und parallel dem Wasserspiegel (Fig. 199). In diesem Falle giebt es im Allgemeinen keine Symmetrie-Achse, aber gleichwohl ist Gl. 4 (S. 180) entbehrlich, weil man leicht erkennt, dass der Druckmittelpunkt auf der Mittellinie *DE* liegen muss, da über jeden wagerechten Streifen des Dreiecks eine gleichmässige Kraftvertheilung stattfindet, so dass der

Druckmittelpunkt jedes Streifens in seiner Mitte liegt. Es handelt sich also nur noch um die Grösse

$$v = \frac{J_s}{F y_0} = \frac{F h^2}{18 F y_0} = \frac{y^2}{18 y_0}$$

(s. 1. Theil, 2. Aufl., S. 275). Sinkt der Wasserspiegel bis an die Oberkante des Dreiecks mit $y_{0\,min} = {}^1/_3 h$, so wird

$$v_{max} = {}^1/_6 h,$$

d. h. es liegt der Druckmittelpunkt dann in der Mitte der Mittellinie DE.

Fig. 199.

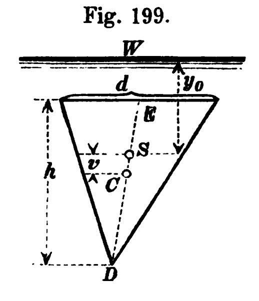
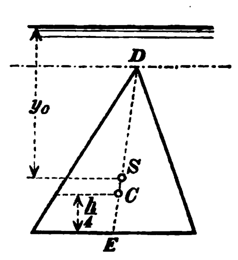
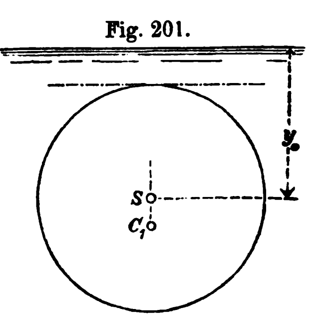


Fig. 200.



β) Liegt die Spitze des Dreiecks oben (Fig. 200), so wird in gleicher Weise $v = \frac{h^2}{18 y_0}$. Rückt aber der Wasserspiegel bis zur Spitze herab, so ist $y_{0\,min} = {}^2/_3 h$, daher $v_{max} = {}^1/_{12} h$ mit C im unteren Viertelpunkte von ED.

Fig. 201.



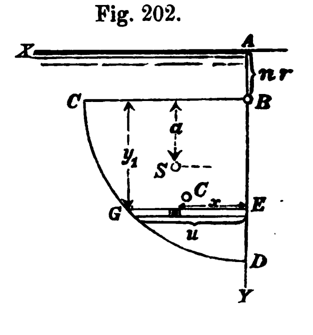
2. Kreis. Es ist (Fig. 201)

$$v = \frac{J_s}{F y_0} = \frac{r^2}{4 y_0}.$$

Für $y_{0\,min} = r$ wird $v_{max} = {}^1/_4 r$ (Punkt C_1).

3. Viertelkreis. Um auch die Anwendung der Gl. 4 (S. 180) zu zeigen, wählen wir nun den Viertelkreis (Fig. 202), dessen Druckmittelpunkt etwas mehr Rechnung erfordert als die obigen einfachen Beispiele.

Fig. 202.



Der Wasserspiegel liege parallel mit dem oberen begrenzenden Halbmesser BC in einer Höhe nr darüber. Der Schwerpunkt der Halbkreisfläche liegt (nach 1. Theil, 2. Aufl., S. 133) um

$$\frac{4}{3\pi} r = a = 0{,}424\, r$$

vom Mittelpunkte entfernt. In dem gleichen Abstande von BC und BD muss auch der Schwerpunkt der Viertelkreisfläche liegen. Mithin ist

$$y_0 = a + nr = r\left(\frac{4}{3\pi} + n\right).$$

Das Trägheitsmoment einer Kreisfläche in Bezug auf einen Durchmesser ist $\frac{1}{4}F_1 r^2$, wenn F_1 die Fläche des Kreises bedeutet. Dazu liefern die 4 Viertelkreise je ein Viertel; sonach muss das Trägheitsmoment des Viertelkreises BCD in Bezug auf BC gleich $\frac{1}{4}Fr^2$ sein, wenn $F = \frac{1}{4}F_1$ die Fläche BCD bedeutet. Das Trägheitsmoment J_S in Bezug auf die wagerechte Schwerpunktsachse ist sonach

$$J_S = F\left(\frac{r^2}{4} - a^2\right) = Fr^2\left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right).$$

Daher wird nach Gl. 5 (S. 180):

1) $$v = \frac{J_S}{F \cdot y_0} = r\,\frac{\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}}{\frac{4}{3\pi} + n}.$$

Zur Ermittelung von x_m nach Gl. 4 (S. 180) wollen wir vorerst das Centrifugalmoment C berechnen. Es empfiehlt sich, dasselbe auszudrücken durch das etwas bequemere Centrifugalmoment C_B in Bezug auf BC und BD. Mit $y = y_1 + nr$ wird

$$C = \int dF\,xy = \int dF\,x(y_1 + nr)$$
$$= \int dF\,xy_1 + nr\int dF\,x, \quad \text{somit}$$

2) $$C = C_B + nrFx_0 = C_B + F\frac{4}{3\pi}nr^2.$$

Ein Flächentheilchen $dF = dx \cdot dy$ liefert zu C_B den Beitrag $dx \cdot dy \cdot xy_1$. Sämmtliche Flächentheilchen des Streifens EG von der Breite u haben übereinstimmende y_1 und dy, liefern also zusammen den Beitrag

$$y_1\,dy\int_0^u x\,dx = \frac{1}{2}y_1 \cdot dy \cdot u^2,$$

mithin der ganze Viertelkreis

$$C_B = \frac{1}{2}\int_0^r y_1\,dy \cdot u^2.$$

Hierin ist $dy = dy_1$; ferner $u^2 = r^2 - y_1^2$, wodurch

$$C_B = {}^1\!/_2 r^2 \int_0^r y_1 \, dy_1 - {}^1\!/_2 \int_0^r y_1^3 \, dy_1 = {}^1\!/_8 r^4, \quad \text{oder}$$

$$C_B = \frac{F \cdot r^2}{2\pi}, \quad \text{und damit}$$

3) $$C = Fr^2 \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{4}{3} \frac{n}{\pi} \right) \quad \text{wird.}$$

Nunmehr ergiebt sich

4) $$x_m = \frac{C}{Fy_0} = r \frac{\frac{1}{2\pi} + \frac{4}{3}\frac{n}{\pi}}{\frac{4}{3\pi} + n} = r \frac{3 + 8n}{8 + 6n\pi}$$

oder, wenn in Zähler und Nenner durch n getheilt wird:

5) $$x_m = r \frac{\frac{3}{n} + 8}{\frac{8}{n} + 6\pi}.$$

Für $n = \infty$ wird (nach Gl. 1) $v = 0$ und Gl. 5 geht über in

$$x_m = \frac{4}{3\pi} r = 0{,}424 r,$$

d. h. Punkt C fällt mit S zusammen, wie es sein muss (vgl. S. 181).

Für $n = 0$ wird (nach Gl. 1)

$$v = \left(\frac{3}{16} \pi - \frac{4}{3\pi} \right) r = 0{,}165 r, \quad \text{und nach Gl. 4:}$$

$$x_m = \frac{3}{8} r = 0{,}375 r;$$

(Punkt C in Fig. 202).

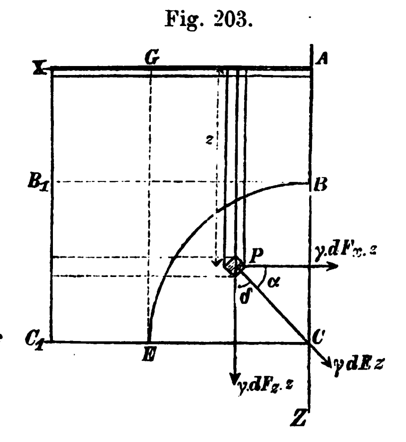
g) Druckkräfte gegen krumme Flächen.

Durch den freien Wasserspiegel sei die Ebene AXY gelegt (Fig. 203), die AZ gehe lothrecht abwärts. Es sollen die Druckkräfte des Wassers gegen die gekrümmte Fläche BEC (etwa Kugeloktant mit dem Mittelpunkte C) bestimmt werden. Ein Flächentheilchen dF bei P in der Tiefe z unter dem Wasserspiegel erfährt eine Druckkraft $\gamma \cdot dF \cdot z$, welche mit den Achsen die Winkel α, β und δ bilden möge. Durch rechtwinklige Zerlegung erhält man

$$dD_x = \gamma \cdot dF \cdot \cos\alpha \cdot z = \gamma \cdot z \cdot dF_x,$$
$$dD_y = \gamma \cdot dF \cdot \cos\beta \cdot z = \gamma \cdot z \cdot dF_y,$$
$$dD_z = \gamma \cdot dF \cdot \cos\delta \cdot z = \gamma \cdot z \cdot dF_z,$$

worin dF_x, dF_y, dF_z die rechtwinkligen Projektionen von dF in der Richtung der x, der y bezw. z bedeuten. Da die Projektion dF_x in derselben Tiefe z unter Wasser liegt wie dF, so bedeutet dD_x auch die Druckkraft gegen die Projektionsfläche, demnach ist die ganze Kraft in der x-Richtung

Fig. 203.



$$D_x = \gamma \int z \cdot dF_x$$

die gesammte Druckkraft, die auf die ebene Projektion $F_x = B_1 C_1$ der gekrümmten Fläche kommen würde und deren Grösse und Lage nach S. 178—190 zu bestimmen ist. Gleiches gilt bezüglich der Seitenkraft

$$D_y = \gamma \int z \cdot dF_y.$$

Dabei ist noch zu bemerken, dass diejenigen Flächen, welche beim Projiciren in einer der beiden wagerechten Richtungen paarweise auf einander fallen, nicht mit in Betracht kommen.

Fig. 204.

Anders verhält es sich mit der Seitenkraft dD_z, weil beim Projiciren von dF auf eine beliebige wagerechte Ebene die Höhenlage des Flächentheilchens dF nicht mit der seiner Projektion dF_z übereinstimmt. Wohl aber bedeutet $\gamma \cdot z \cdot dF_z$ das Gewicht derjenigen Flüssigkeitssäule, die vom Flächentheilchen dF bis zum Wasserspiegel reicht. Daher ist auch

$$D_z = \gamma \int \cdot z \cdot dF_z$$

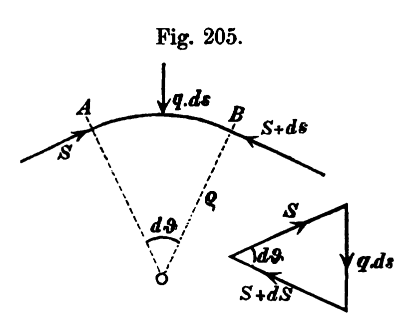
das Gewicht der lothrecht über der gedrückten Fläche stehenden Wassermasse $ABEG$ (Fig. 203) und geht durch deren Schwerpunkt.

Ist jedoch die Fläche BCE (Fig. 204) so gestaltet, dass ein Theil CE derselben schräg aufwärts gerichtete Theildrücke erfährt, so liefert diese zu D_z einen aufwärts gerichteten Beitrag D_z'', gleich und entgegengesetzt dem Gewichte eines gedachten Wasserkörpers $CGHE$, der von der Fläche CE bis zum Wasserspiegel reichen würde, und durch dessen Schwerpunkt geht, während der Beitrag D_z' der Fläche BC wie vorhin bestimmt wird.

h) Riegel eines gekrümmten Schleusenthores.

Die Riegel eines ebenen Schleusenthores (S. 186) wurden sehr ungleichmässig gespannt. Geht man für grössere Schleusenbreiten zu eisernen Thoren über, so kann man durch die Wahl gekrümmter Riegel und Thore eine bessere Ausnutzung der Festigkeit, d. h. eine gleichmässigere Spannung, erreichen. Es soll die Bedingung gesucht werden, unter welcher ein Riegel in wagerechter Ebene überall eine gleichmässig über den Querschnitt vertheilte Druckkraft erfährt.

Fig. 205.



Ist (Fig. 205) $AB = ds$ ein Theilchen des Riegels mit dem Krümmungshalbmesser ϱ und dem Mittelpunktswinkel $d\vartheta$, ferner q die auf die Längeneinheit kommende, nach S. 184 zu bemessende Belastung, so müssen nach obiger Bedingung an den Schnittstellen die centrischen Druck-Spannkräfte S und $S + Sd$ auftreten. Das Gleichgewicht erfordert $S = S + dS$, d. h. $dS = 0$, oder S überall gleich. Ferner ist gemäss dem Krafteck in Fig. 205:

$$S \sin {}^1\!/_2 d\vartheta = {}^1\!/_2 q\, ds \quad \text{oder, wegen} \quad \sin d\vartheta = d\vartheta,$$

$$S d\vartheta = q\, ds = q \varrho d\vartheta, \quad \text{daher}$$

1) $$S = q \varrho .$$

Da nun S überall gleich war, so muss wegen der Unveränderlichkeit von q auch ϱ über die ganze Länge des Riegels denselben Werth haben, d. h. der **Riegel muss kreisförmig sein.**

Zwischen den Wendesäulen A und B (Fig. 206) im Abstande $2a$ sind nun verschiedene Kreisbögen möglich. Für einen Halbmesser ϱ und einen halben Mittelpunktswinkel α ist die Bogenlänge $AC = \varrho\alpha$, die halbe Weite $a = \varrho \sin\alpha$. Einer Spannkraft $S = q\varrho$ entspricht ein Querschnitt $F = q\varrho : \sigma$, wenn σ die zulässige Spannung, daher ist der Rauminhalt des Riegels eines Flügels

Fig. 206.

$$2) \qquad V = F\varrho\alpha = \frac{q}{\sigma}\varrho^2\alpha = \frac{q}{\sigma}a^2\frac{\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Soll V möglichst klein werden, so muss nach der Regel vom Minimum

$$0 = \sin^2\alpha - \alpha \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha \quad \text{oder}$$

$$3) \qquad \operatorname{tg}\alpha = 2\alpha \quad \text{sein.}$$

Dieser Bedingung genügt ein Winkel $\alpha = 66^\circ 47'$ mit $\sin\alpha = 0{,}919$; dafür wird $\rho = a : 0{,}919 = 1{,}088\, a$, und

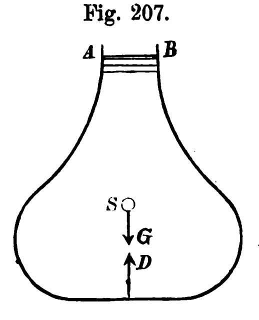
$$F = \frac{q}{\sigma}\rho = 1{,}088\, a\frac{q}{\sigma}.$$

Praktischen Gebrauch macht man von dieser Untersuchung nicht; sie ist nur eine Übungsaufgabe der angewandten Mathematik.

i) Gesammtdruck auf die Gefässwände. Auftrieb einer Flüssigkeit.

Befindet sich in einem oben offenen Gefässe (Fig. 207) ein flüssiger Körper im Gleichgewichte, so wirkt an der Flüssigkeit vom Rauminhalte V als Massenkraft das Gewicht $G = \gamma V$ lothrecht abwärts, durch den Schwerpunkt S der Flüssigkeit gehend. Ist D der Gesammtdruck der Gefässwände gegen die Flüssigkeit, d. h. die gesammte Oberflächenkraft, so muss D mit G im Gleichgewichte sein, also $D = G = \gamma V$ lothrecht **aufwärts** durch den Schwerpunkt der Flüssigkeit gehen. Der Gesammtdruck des flüssigen Körpers auf die Gefässwände ist nach dem Gesetze der Wechselwirkung das Entgegengesetzte von D, d. h. völlig übereinstimmend mit dem Gewichte G des flüssigen Körpers. Seitendrücke D_x und D_y kommen hier nicht in Betracht, weil beim Projiciren der gesammten inneren

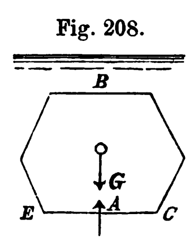
Fig. 207.



Oberfläche des Gefässes auf eine lothrechte Ebene die Theilchen paarweise auf einander fallen.

Umgrenzen wir in einem grösseren, im Gleichgewichte befindlichen flüssigen Körper einen beliebigen Theil BCE (Fig. 208), so müssen an diesem ebenfalls die gesammte Massenkraft G und der Gesammtdruck A aller ihn umgebenden Flüssigkeitstheilchen sich aufheben, d. h. es muss $A = G = \gamma V$, aufwärts gerichtet sein und durch den Schwerpunkt des Körpers V gehen. Vertauscht man nun den Flüssigkeitstheil BCE mit einem anderen Körper, dessen Oberfläche genau mit der Umgrenzung BCE übereinstimmt, so übt die umgebende Flüssigkeit auf den eingetauchten Körper ganz dieselben Kräfte aus, wie auf den etwa erstarrt gedachten Theil BCE des flüssigen Körpers, mithin ist der Gesammtdruck der Flüssigkeit gegen einen in sie eingetauchten Körper

Fig. 208.



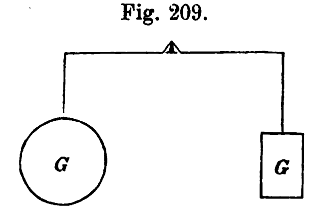
1) $$A = \gamma V.$$

Diese Kraft heisst der **Auftrieb.** Sie ist ganz unabhängig von der Massenvertheilung des eingetauchten Körpers, lediglich bedingt durch den Flüssigkeitskörper, dessen Stelle der feste Körper einnimmt, also durch die von dem festen Körper verdrängte Flüssigkeit.

Der Auftrieb einer Flüssigkeit gegen einen in dieselbe eingetauchten Körper ist lothrecht aufwärts gerichtet, gleich dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit und geht durch deren Schwerpunkt.

Diese Regel gilt sowohl für einen völlig, als auch für einen nur theilweise eingetauchten Körper. In letzterem Falle bedeutet V den Rauminhalt des unter Wasser befindlichen Theiles des eingetauchten Körpers. Befindet sich der eingetauchte Körper ganz unter Wasser und ist er nicht zusammendrückbar, so ist der Auftrieb unabhängig von der Tiefe des Körpers unter Wasser, weil nach S. 165 die Dichte γ unveränderlich ist.

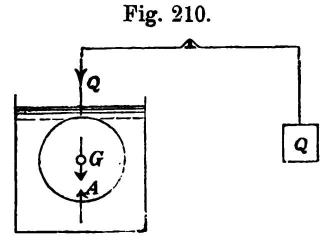
Fig. 209.



Hängt man einen Körper vom Gewichte G an eine gleicharmige Waage (Fig. 209), so muss an der anderen Seite derselben

ein gleiches Gewicht G angebracht werden, um den Körper im Gleichgewichte zu halten. Ist aber (Fig. 210) der an der Waage hängende Körper vom Rauminhalte V ganz in eine Flüssigkeit von der Dichte γ eingetaucht und ist sein Gewicht G grösser als der Auftrieb A, so ist nur ein Gewicht Q nöthig, um dem jetzt noch vorhandenen abwärts gerichteten Gewichte des Körpers

Fig. 210.



2) $$Q = G - A$$

das Gleichgewicht zu halten. Dieses Gewicht Q heisst das scheinbare oder relative Gewicht des Körpers in Bezug auf die Flüssigkeit.

Die Wägung eines Körpers im eingetauchten Zustande ersetzt in manchen Fällen eine Bestimmung des Rauminhaltes. Kennt man nämlich V, so ist damit auch der Auftrieb $A = \gamma V = G - Q$ gegeben. Ist es aber nicht thunlich, V durch Messung zu bestimmen, so führt die Ermittelung des wahren und des scheinbaren Gewichtes (G und Q) zum Ziele, denn es ist

3) $$V = A : \gamma = (G - Q) : \gamma .$$

Damit hat man denn auch die mittlere Dichte γ_1 des eingetauchten Körpers, nämlich

4) $$\gamma_1 = \frac{G}{V} = \gamma \frac{G}{G - Q},$$

oder, wenn er homogen ist, seine wahre Dichte.

Bekanntlich verwandte schon Archimedes (281—212 vor Chr.), der das Wesen des Auftriebes beim Baden erkannte, die doppelte Wägung, um festzustellen, wie viel Gold und wie viel Silber in der Krone des Hiero von Syrakus enthalten sei. Ist V_1 die Raummenge Goldes von der Dichte γ_1, V_2 die Raummenge Silbers von der Dichte γ_2 in der Krone, so ist deren wahres Gewicht

5) $$G = \gamma_1 V_1 + \gamma_2 V_2 .$$

Der Auftrieb des Wassers (Dichte γ) ist $A = \gamma (V_1 + V_2)$, mithin das scheinbare Gewicht

6) $$Q = G - \gamma \cdot (V_1 + V_2) .$$

Diese beiden Gleichungen 5 und 6 können nach den Unbekannten V_1 und V_2 aufgelöst werden:

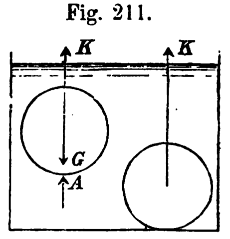
7) $$V_1 = \frac{G\left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma}\right) + \frac{\gamma_2}{\gamma} Q}{\gamma_1 - \gamma_2} .$$

Um V_2 zu erhalten, braucht man in Gl. 7 nur die Indices 1 und 2 mit einander zu vertauschen.

Steht ein Gefäss mit Wasser auf einer Waagschale und taucht man mit dem Finger in das Wasser, so muss die Waagschale sich senken. Der Finger erfährt von dem Wasser einen Auftrieb A, und dieselbe Kraft übt der Finger auf das Wasser und somit auf das Gefäss nach unten aus. Ist V der eingetauchte Rauminhalt, F der Querschnitt des Gefässes in der Höhe des Wasserspiegels, so steigt ja auch das Wasser im Gefässe um $\Delta h = V : F$, dadurch wächst der lothrechte Druck auf das Gefäss um $\gamma F \Delta h = \gamma V$, d. h. genau um den Auftrieb. Ähnlich ist es, wenn man ein Stück Holz oder einen Fisch auf oder in das Wasser setzt; der lothrechte Druck auf das Gefäss ist dann, wenn wieder Gleichgewicht herrscht, genau um das Gewicht des Holzes oder Fisches gewachsen.

Eine Kraft $K = Q = G - A = G - \gamma V$, die einen unter Wasser befindlichen Körper in der Schwebe hält (Fig. 211), genügt auch, denselben langsam und gleichmässig im Wasser aufwärts zu bewegen, (bei schneller Bewegung entstehen Bewegungswiderstände, die von der Geschwindigkeit abhängig sind). Auch wenn der Körper auf dem Boden des Gefässes liegt, ihn aber nur in einzelnen Punkten oder Linien, nicht in Flächen, berührt, wird eine aufwärts gerichtete, die Grösse $Q = G - \gamma V$ nicht wesentlich überschreitende Kraft K hinreichen, den Körper vom Boden empor zu heben.

Fig. 211.



Zweifelhaft kann man aber über die Grösse der zum Emporheben vom Boden erforderlichen Kraft K sein, wenn der Körper den Boden des Gefässes mittels einer grösseren Fläche berührt.

In dem Falle der Fig. 212 lastet auf der oberen Fläche des Körpers eine Druckkraft $\gamma F h$, und es muss mindestens

8) $$K = G + \gamma \cdot F \cdot h$$

sein, um den Körper vom Boden abzuheben, wenn an der unteren Fläche des Körpers kein Wasserdruck wirkt.

Fig. 212.

Letztere Annahme wird aber in den meisten Fällen nicht zutreffen. Befand sich in dem Gefässe schon Wasser, bevor der Körper auf den Boden gesenkt wurde, so wird unter ihm eine dünne Wasserschicht ver-

bleiben, die den Wasserdruck auf die untere Fläche überträgt, so dass nur

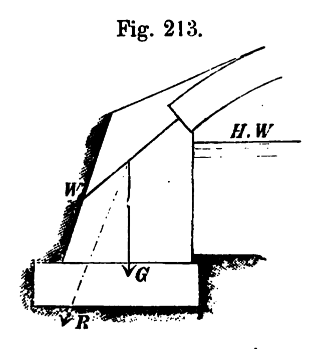
9) $$K = G + \gamma \cdot F \cdot h - \gamma \cdot F \cdot h' = G - \gamma \cdot V$$

zum Heben erforderlich ist.

Wird der Körper auf den Boden des leeren Gefässes gelegt und dann erst mit Wasser übergossen, so ist es doch leicht möglich, dass in Folge kleiner Unebenheiten, Poren u. dgl. an dem Körper oder am Boden, Wasser unter den Körper dringt und Formel 9 gültig bleibt. Nur in solchen Fällen, wo Körper und Boden ohne Poren, sauber bearbeitet und trocken aufeinander geschliffen sind, wird das nachträglich eingegossene Wasser wahrscheinlich nicht unter den Körper dringen können, so dass Formel 8 anzuwenden wäre.

Derartige Erwägungen sind erforderlich, wenn es sich z. B. um die Standsicherheit des Widerlagers einer gewölbten Brücke handelt (Fig. 213). Steht das Widerlager im Trocknen, so hat man das wahre Gewicht G desselben mit dem Kämpferdrucke W des Gewölbes (und dem etwaigen Erddrucke) zusammenzusetzen, um daraus die für die Sicherheit des Widerlagers massgebende Mittelkraft R zu erhalten. Ist das Bauwerk aber dem Hochwasser $H \cdot W$ ausgesetzt, so hat man zu erwägen, ob es wahrscheinlich ist, dass das Wasser in die Fugen oder unter die Grundfläche des Mauerwerks dringen kann. In diesem Falle würde, wenn auch die Hinterfüllungserde vom Wasser durchzogen ist, der unter Wasser befindliche Theil des Mauerwerks nur mit seinem scheinbaren Gewichte $Q = G - \gamma V = (\gamma_1 - \gamma) V$, d. h. bei $\gamma_1 = 2\gamma$ nur mit der Hälfte seines Gewichtes einzuführen sein.

Fig. 213.



Bei kiesigem Boden wird das Wasser wohl Wege finden, um, wenn auch nicht sofort, doch mit der Zeit, unter dem Grundmauerwerke mit seinem vollen Drucke zu wirken, wogegen auch eine das Mauerwerk umschliessende Spundwand nicht schützen kann. Bei felsigem Untergrunde dürfte es öfter gelingen, das Mauerwerk mit Cementmörtel dem Felsen wasserdicht anzuschliessen. Es hängt somit von der Beschaffenheit des Untergrundes und der sorgfältigen

Ausführung des Grundbaues ab, ob man im einzelnen Falle den Wasserdruck ausser Acht lassen darf.

k) Gleichgewicht schwimmender Körper.

Ist die mittlere Dichte γ_1 eines Körpers kleiner als die Dichte γ des Wassers, so fällt sein scheinbares Gewicht $Q = G - A = \gamma_1 V - \gamma V = (\gamma_1 - \gamma) V$ negativ aus. Der Körper wird daher, wenn er nicht durch eine besondere abwärts gerichtete Kraft $K = Q$ niedergehalten wird, sich aus dem Wasser erheben, auf dem Wasser schwimmen (Fig. 214) und wird im Gleichgewichte sein, wenn der Auftrieb γV des eingetauchten Theiles V, die Wasserverdrängung (kurzweg Verdrängung oder Deplacement), sich mit dem wahren Gewichte G des Körpers im Gleichgewichte hält. Dazu ist erforderlich, dass $\gamma V = G$ sei und dass der Schwerpunkt S des Körpers mit dem Schwerpunkt E der verdrängten Wassermasse V in derselben Lothrechten liege. Die Gerade SE im Körper heisst die Schwimmachse, die zu ihr rechtwinklige Ebene BOC des Körpers, welche im Gleichgewichte mit dem Wasserspiegel zusammenfällt, wird die Schwimmebene genannt.

Fig. 214.

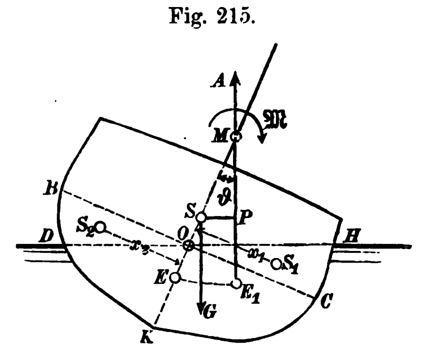


Fig. 215.

Es soll nun die Sicherheit eines schwimmenden Schiffes gegen Umkippen untersucht werden. Das Schiff habe eine Symmetrieebene, die durch die Schwimmachse SE geht.

Es werde in irgend einer Weise, etwa mittels zweier wagerechten Taue, ein Kräftepaar $\mathfrak{M}$ auf den Schiffskörper (Fig. 215) ausgeübt, dessen Achse

rechtwinklig zur Querschnittebene steht, und dadurch eine Schiefstellung desselben um den kleinen Winkel ϑ bewirkt. Hierdurch ändert sich die Form der Verdrängung und damit die Lage des Auftriebes A. Ist nun auch in dieser schrägen Lage noch Gleichgewicht vorhanden, bilden also G und A ein Kräftepaar, welches das Umsturzmoment $\mathfrak{M}$ aufhebt, so befand sich das Schiff in der aufrechten Lage (vor Einwirkung des Momentes $\mathfrak{M}$) im sicheren Gleichgewichte; nach einer Störung desselben kehrt es unter Einwirkung von G und A selbstthätig in die aufrechte Lage zurück. Nach Fig. 215 ist dazu erforderlich, dass die neue Lage von A (durch den Schwerpunkt E_1 der jetzigen Verdrängung DKH) rechts von G, d. h. rechts von S liege, und dass A die Schwimmachse in einem Punkte M schneide, der oberhalb des Schwerpunktes S liegt. Das Standsicherheits-Moment ist dann

$$\mathfrak{M} = G \cdot \overline{SP} = \gamma V \cdot \overline{SM} \sin\vartheta,$$

oder bei kleinem Winkel ϑ

1) $$\mathfrak{M} = G \cdot \overline{SM} \cdot \vartheta = \gamma V \cdot \overline{SM} \cdot \vartheta.$$

Die Länge SM ist für die Standsicherheit massgebend. Nennt man die seitliche Verschiebung des Schwerpunktes der Verdrängung

$$EE_1 = x,$$

so kann EE_1 bei kleinem ϑ auch als Kreisbogen um M aufgefasst und $EE_1 = x = EM \cdot \vartheta$ gesetzt werden. Mit $ES = e$ wird

2) $$SM = ME - e = \frac{x}{\vartheta} - e.$$

Da die Störung der aufrechten Lage durch ein Kräftepaar hervorgerufen wurde, so bleibt stets $A = G$, d. h. die Verdrängung V der Grösse nach unverändert; mithin muss das eintauchende Keilstück $V_1 = COH$ gleich dem austauchenden Keilstücke $V_2 = BOD$ sein. Sind S_1 und S_2 die Schwerpunkte dieser Keilstücke und bezieht man die Schwerpunkte

$$E \quad E_1 \quad S_1 \quad S_2$$

auf die Symmetrie-Ebene $KESM$ mit den Abständen

$$0,\ x,\ x_1,\ x_2,$$

wobei, wegen der Kleinheit von ϑ, auch der rechtwinklige Abstand des Punktes E_1 von KM gleich x gesetzt werden darf, so gilt, weil

$$DKH = V = BKC + OCH - OBD, \text{ d. h.}$$

$$V = V + V_1 - V_2$$

ist (nach 1. Theil, 2. Aufl., S. 125), die Momentengleichung:

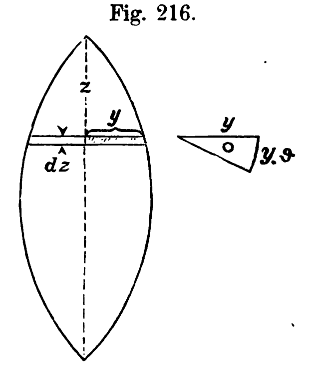
$$Vx = V \cdot 0 + V_1 x_1 - V_2 (- x_2).$$

Der Abstand des Punktes S_2 ist als $- x_2$ eingeführt, da S_2 links von KM liegt. Setzen wir nun voraus, dass BC und DH sich auf der Schwimmachse in O schneiden und dass $x_1 = x_2$ gesetzt werden darf, so wird, wegen $V_1 = V_2$:

3) $$x = \frac{2 V_1 x_1}{V} \quad \text{und} \quad SM = \frac{2 V_1 x_1}{V \vartheta} - e.$$

Die Grösse $V_1 x_1$ ist von der Gestalt der Wasserlinie des Schiffes (Fig. 216) abhängig. Ist in einem Abstande z von der Vorderkante die halbe Breite in der Schwimmebene y, so liefert ein Längentheilchen dz zu V_1 einen Beitrag $\frac{1}{2} y^2 \cdot \vartheta \cdot dz$ und zu $V_1 x_1$ annähernd einen Beitrag $\frac{1}{2} y^2 \cdot \vartheta \cdot \frac{2}{3} y \cdot dz$ $= \frac{1}{3} y^3 \cdot \vartheta \cdot dz$, so dass

Fig. 216.



$$V_1 x_1 = \frac{1}{3} \vartheta \int y^3 \cdot dz$$

wird. Nun ist aber $\frac{1}{3} y dz \cdot y^2$ das Trägheitsmoment des in Fig. 216 schraffirten Theilchens der Schwimmfläche in Bezug auf ihre Längenachse (1. Theil, 2. Aufl., S. 275). Also ist das Trägheitsmoment der ganzen Schwimmfläche in Bezug auf ihre Längsachse

4) $$\mathfrak{J} = \frac{2}{3} \int y^3 \cdot dz, \quad \text{so dass}$$

$$2 V_1 \cdot x_1 = \mathfrak{J} \cdot \vartheta \quad \text{wird.}$$

Führt man dies in Gl. 3 ein, so ergiebt sich

5) $$SM = \frac{\mathfrak{J}}{V} - e.$$

Die Länge SM ist hiernach bei kleinem Neigungswinkel ϑ von diesem Winkel unabhängig, d. h. der Punkt M hat auf der Schwimmachse eine bestimmte Lage und wird, weil er, von E aus betrachtet, bei sicherem Gleichgewichte jenseits des Schwerpunktes S

liegt, das Metacentrum ($\mu\varepsilon\tau\alpha$ = jenseits), und seine Höhe SM über S die metacentrische Höhe genannt. Das Standsicherheismoment ist sonach

6) $$\mathfrak{M} = \gamma V \left(\frac{\mathfrak{J}}{V} - e \right) \vartheta .$$

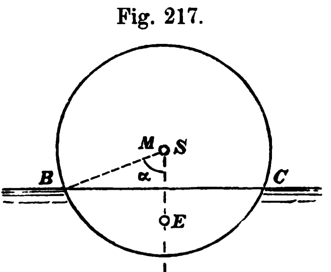
Ist der schwimmende Körper ein **Prisma** von der Länge l, ist F der Querschnitt der Verdrängung $V = Fl$ und b die Breite in der Schwimmebene, so wird $\mathfrak{J} = {}^1\!/_{12}\, l b^3$, daher

7) $$SM = \frac{b^3}{12F} - e .$$

Die Länge SM ist jedoch nur für geringe Neigungswinkel von deren Grösse unabhängig. Für die stärkeren Bewegungen der Seeschiffe darf ein festes Metacentrum nicht angenommen werden.

Hat der Schwimmkörper die Form eines liegenden **Cylinders** oder einer **Kugel**, erhält der eingetauchte Raum, die Verdrängung V, demnach die Gestalt eines Cylinder- oder Kugelabschnittes, so ändert eine Drehung die Form von V gar nicht; es geht der Auftrieb stets durch die Achse des Cylinders bezw. den Mittelpunkt der Kugel (Fig. 217). Ist der Körper ein Cylinder oder eine Kugel überall gleicher Dichte γ_1, so fallen Schwerpunkt S und Metacentrum M zusammen; ein derartiger Körper schwimmt also in unentschiedenem Gleichgewichte; er setzt einer Drehung keinen Widerstand entgegen und kehrt auch nicht in die ursprüngliche Lage zurück, ist daher als Schiffsform unbrauchbar.

Fig. 217.



Für die Eintauchung eines Cylinders (Fig. 217) gilt die Gleichung $r^2 \pi \gamma_1 = r^2 (\alpha - {}^1\!/_2 \sin 2\alpha)\gamma$. Diese Gleichung lässt sich nach α nur durch Probiren auflösen, nach $\gamma_1 : \gamma$ aber mit:

8) $$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{2\pi} .$$

Soll $\alpha = 60^0 = {}^1\!/_3 \pi$ werden, so muss

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{{}^2\!/_3 \pi - 0{,}866}{2\pi} = 0{,}195 \quad \text{sein.}$$

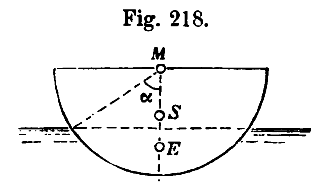
Für einen homogenen Halbcylinder (Fig. 218) ist die metacentrische Höhe $SM = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}$ (1. Theil, 2. Aufl., S. 133). Die Eintauchungstiefe ist bedingt durch

$\frac{1}{2} r^2 \pi \gamma_1 = r^2 (\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha)\gamma$ oder

9) $$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\pi}.$$

Soll jetzt $\alpha = 60^0$ werden, so muss $\gamma_1 : \gamma = 2 \cdot 0{,}195 = 0{,}39$ sein.

Fig. 218.

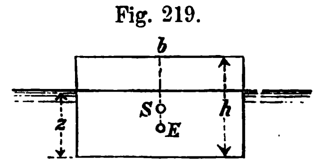


Für ein homogenes rechtwinkliges Parallelepiped (Fig. 219) von der Höhe h, der Breite b, der Dichte γ_1 gilt für die Eintauchungstiefe z die Gleichung

$$\gamma z b = \gamma_1 h b, \quad \text{d. h.}$$

10) $$z = h \frac{\gamma_1}{\gamma}.$$

Fig. 219.



Der Schwerpunkt S des Körpers liegt um $\frac{1}{2}h$, der Schwerpunkt E der Verdrängung um $\frac{1}{2}z$ vom Boden entfernt, mithin ist

$$e = ES = \frac{1}{2}(h - z) = \frac{h}{2} \cdot \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right).$$

Dann wird nach Gl. 7 mit $F = bz$

$$SM = \frac{b^3}{12 b z} - e = \frac{b^2}{12 h}\frac{\gamma}{\gamma_1} - \frac{h}{2}\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right),$$

11) $$SM = \frac{h}{12}\left(\frac{b^2}{h^2}\frac{\gamma}{\gamma_1} - 6\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right)\right).$$

Damit $SM > 0$ werde, d. h. Standsicherheit vorhanden sei, muss

12) $$\frac{b}{h} > \sqrt{6 \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma}\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right)}$$

und für Holz mit $\gamma_1 = 0{,}6\gamma$

$$\frac{b}{h} > \sqrt{6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = 1{,}2 \quad \text{sein.}$$

Ist aber $b = 8h$ (Fig. 220) und wiederum $\gamma_1 = 0{,}6\gamma$, so wird

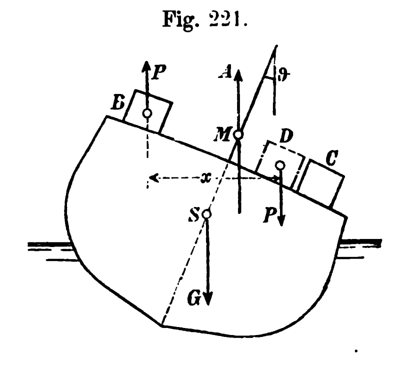
$$SM = \frac{h}{12}\left(\frac{64}{0{,}6} - 6 \cdot 0{,}4\right) = 8{,}7\,h.$$

Ein solcher flossartiger Körper hat also eine grosse metacentrische Höhe und bedeutende Standsicherheit. Jedoch gilt dies nur, so lange von den Oberkanten J und K keine unter Wasser, von den Unterkanten N und L keine über Wasser liegt. Bei stärkeren Neigungen, wie sie in unruhigem Wasser leicht vorkommen, ist die Standsicherheit geringer.

Fig. 220.

Bei neu gebauten Schiffen wird die metacentrische Höhe SM zuweilen durch einen sog. Krängungs- (d. h. Neigungs-) Versuch (Fig. 221). ermittelt. Das Schiff möge anfänglich gerade geschwommen haben. Wird nun eine schwere Last P etwa von B um die Entfernung x nach D verschoben, so ist die Fortnahme von B gleichbedeutend mit der Anbringung einer dort aufwärts gerichteten Kraft P, während bei D eine gleiche abwärts gerichtete Kraft auftritt. Die Verschiebung bewirkt demnach ein Kräftepaar Px. Entsteht dabei eine Schrägstellung um den Winkel ϑ, der mittels eines Lothes am Mastbaum abgelesen werden kann, so ist nach Gl. 1

Fig. 221.



$$G \cdot \overline{SM} \cdot \vartheta = P \cdot x, \quad \text{mithin}$$

13) $$SM = \frac{P}{G} \frac{x}{\vartheta}.$$

Beispiel: Für ein Seeschiff betrage die Verdrängung $V = 10\,000$ cbm, dann ist, weil für Seewasser $\gamma = 1025$ kg/cbm, $G = 10\,250$ t. Wird eine schwere Last (etwa ein Geschütz) von $P = 20$ t und 5 m seitwärts verschoben und entsteht dadurch eine Neigung $\vartheta = {}^1/_2{}^0 = 0{,}0087$, so folgt

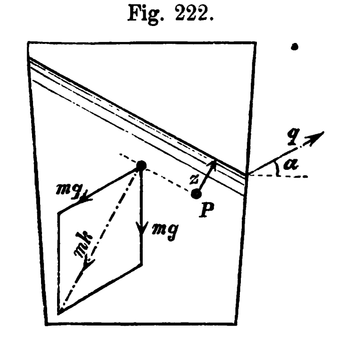
$$SM = \frac{20}{10\,250} \frac{5}{0{,}0087} = 1{,}11 \text{ m}.$$

Wie gross die metacentrische Höhe für Schiffe verschiedenen Zweckes sein muss, ist lediglich durch Erfahrung festgestellt worden. Bei transatlantischen Dampfern genügt schon eine metacentrische Höhe von $0{,}3^{\mathrm{m}}$; Segelschiffe müssen wegen des Segeldruckes und Kriegsschiffe wegen des Abfeuerns der Geschütze eine grosse Standsicherheit (oder Steifigkeit) haben, daher etwa $SM = 1^{\mathrm{m}}$. Ein zu grosses Steifigkeits- oder Standsicherheits-Moment ist für die Festigkeit des Schiffes, welche dieses Moment aufnehmen muss, nicht vortheilhaft, hat auch starke Winkelbeschleunigungen und daher heftige, unangenehme Bewegungen zur Folge, während ein Schiff von geringerer Steifigkeit weniger angegriffen wird und sanftere, weniger schädliche Bewegungen ausführt.

l) Tropfbar flüssige Körper in scheinbarer Ruhe in Bezug auf ein beschleunigt fortschreitendes Gefäss.

Das Gefäss (Fig. 222) möge eine gleichbleibende Beschleunigung q mit der Neigung α aufwärts haben. Soll nun eine Flüssigkeit darin in scheinbarer Ruhe verbleiben, also nicht hin und her schwanken, so muss an jedem Massentheilchen Gleichgewicht der Kräfte herrschen, nachdem die Ergänzungskraft $-mq$ (1. Theil, 2. Aufl., S. 84) hinzugefügt ist. Setzt man nun die Schwere mg mit $-mq$ zusammen, so entsteht eine Mittelkraft mk. Dies ist jetzt die gesammte Massenkraft, welche mit den Oberflächenkräften im Gleichgewichte sein muss. An die Stelle der einzigen Massenkraft mg im wirklichen Ruhezustande tritt nun in jeder Beziehung mk. Der Wasserspiegel muss daher jetzt rechtwinklig zur Richtung von mk stehen.

Fig. 222.



Für den Druck p in einem rechwinkligen Abstande z vom Wasserspiegel gilt $p \cdot dF = \frac{\gamma}{g} dF \cdot zk$, weil ein Prisma von der Höhe z und der Grundfläche dF die Masse $\frac{\gamma}{g} dF \cdot z$ hat; also

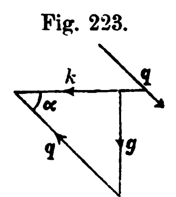
$$1) \qquad p = \frac{\gamma}{g} kz.$$

Ist q schräg nach unten gerichtet (Fig. 223), so kann k auch wagerecht, der Wasserspiegel also lothrecht werden. Dazu ist erforderlich, dass $q \sin\alpha = g$ wird.

Bei lothrecht aufwärts gerichtetem q wird

$$k = g + q; \quad p = \gamma\left(1 + \frac{q}{g}\right)z.$$

Fig. 223.



Bei lothrecht abwärts gerichtetem q wird

$$k = g - q; \quad p = \gamma\left(1 - \frac{q}{g}\right)z.$$

Für $q = g$ wird in diesem Falle

$$k = 0 \quad \text{und} \quad p = 0.$$

Wenn also ein Gefäss mit Wasser im luftleeren Raume frei fällt, so übt das Wasser keinen Druck auf die Gefässwände aus. Lassen wir deshalb das Gefäss ganz fort, so dass das Wasser im luftleeren Raume frei fällt, so ist auch jetzt unter den bisherigen Voraussetzungen das Wasser drucklos und ohne Bestreben, eine bestimmte Form anzunehmen. In Wirklichkeit aber herrscht in dem Wasser eine sog. Oberflächen-Spannung; diese hat das Bestreben, einen Körper kleinster Oberfläche, d. h. eine Kugel, zu bilden; unter ihrer Einwirkung entsteht die Bildung kugelförmiger Tropfen. Allerdings würde auch die gegenseitige Massenanziehung der Theilchen eines flüssigen Körpers eine Tropfenbildung herbeiführen, doch ist diese (1. Theil, S. 54) so klein, dass sie bei Körpern geringer Grösse gegenüber der Oberflächenspannung verschwindet.

Fig. 224.

Ist die Beschleunigung $q > g$ und lothrecht abwärts gerichtet, so hat jedes Theilchen das Bestreben, mit der Beschleunigung $k = q - g$ gegen die obere Fläche des Gefässes zu fallen (1. Theil, S. 86). Scheinbare Ruhe ist dann nur möglich bei oben befindlichem Boden und unten befindlichem wagerechten Wasserspiegel (Fig. 224).

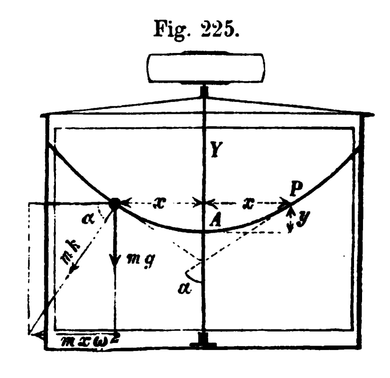
m) Tropfbar flüssige Körper in gleichmässiger Drehung um eine Achse.

Setzt man ein Gefäss, in dem sich eine Flüssigkeit befindet, in Drehung um seine lothrechte Achse, so nimmt der flüssige Körper nicht sofort an der Drehung Theil. Beim Fehlen jedes Reibungswiderstandes zwischen Gefäss und Flüssigkeit würde letztere durch Drehung des Gefässes überhaupt nicht mitgenommen werden, sondern in Ruhe verbleiben. Da aber in Wirklichkeit Reibung stattfindet,

so wird durch schnelle Drehung des Gefässes auch die Flüssigkeit bald in nahezu die gleiche Drehgeschwindigkeit versetzt.

Die in einem ruhenden cylindrischen Gefässe befindliche Flüssigkeit kann aber auch durch eine mit Flügeln versehene Welle, mittels einer oben angebrachten Riemenscheibe, in gleichmässiger Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω erhalten werden (Fig. 225). Dann hat man an jedem Massentheilchen m zu der wirklichen Massenkraft mg (nach 1. Theil, S. 88) noch die Centrifugalkraft $m x \omega^2$ hinzuzufügen, (wenn x der Abstand des Massentheilchens von der Achse ist), um die gesammte Massenkraft mk zu erhalten. Letztere schliesst mit der Wagerechten einen Winkel α ein, für den gilt

Fig. 225.



$$1) \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{g}{x \omega^2}.$$

Liegt das Massentheilchen an der Oberfläche und denkt man sich die übrige Masse, ausser jenem Theilchen, zu einem festen, völlig glatten Körper erstarrt, so muss die Fläche, damit das Theilchen auf ihr in scheinbarer Ruhe verbleibe, rechtwinklig zu der Massenkraft mk stehen, d. h. jenen Winkel α mit der Lothrechten einschliessen. Da die Verhältnisse für alle Punkte einer wagerechten Ebene, die in dem gleichen Abstande x von der Achse sich befinden, dieselben sind, so muss die Oberfläche eine Umdrehungsfläche sein, deren Meridianlinie im Abstande x von der Achse eine Neigung α gegen die Drehachse hat. Für $x = 0$ ist (nach Gl. 1) $\alpha = 90^0$; mit wachsendem x verkleinert sich α und die Kurve wird steiler. Legt man durch den Punkt A, in welchem die Kurve die Drehachse schneidet, ein Achsenkreuz, sind x und y die Koordinaten eines Punktes P der Kurve, so ist das Neigungsverhältnis der Tangente im Punkte P gegen die Lothrechte AY

$$\operatorname{tg} \alpha = dx : dy.$$

Verbindet man hiermit Gl. 1, so wird

$$\omega^2 x \, dx = g \, dy \quad \text{oder}$$

$$d(\tfrac{1}{2} \omega^2 \cdot x^2) = d(g \cdot y).$$

Sind nun die Differentiale zweier Grössen einander gleich, so unterscheiden sich die Grössen selbst um eine von den Veränderlichen unabhängige Grösse C; mithin wird

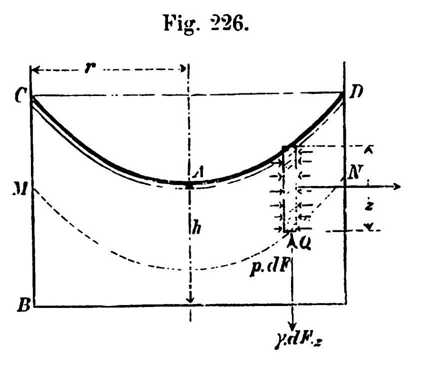
$$2)\qquad {}^1/_2\,\omega^2 \cdot x^2 = g \cdot y + C.$$

Die Grösse C ist abhängig von der willkürlichen Lage des Anfangspunktes A. Hier ist Punkt A so gelegt, dass er der gesuchten Kurve angehört mit den Koordinaten $x = 0$ und $y = 0$. Die allgemeine Gleichung 2 muss also für $x = 0$ und $y = 0$ gültig bleiben. Daraus entsteht die Bedingung $0 = 0 + C$, d. h. $C = 0$ und

$$3)\qquad x^2 = \frac{2g}{\omega^2} y \quad \text{oder} \quad y = \frac{\omega^2 x^2}{2g}.$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel mit lothrechter Achse vom Parameter $g : \omega^2$, übereinstimmend mit der Form des sich drehenden Armes (1. Theil, 2. Aufl., S. 91, Fig. 90). auf dem ein Massenpunkt an jeder Stelle in scheinbarer Ruhe verbleiben soll; die freie Oberfläche ist sonach ein Umdrehungs-Paraboloid. Je grösser ω ist, desto kleiner wird der Parameter, desto steiler stellt sich die Parabel in einem gewissen Abstande von der Achse. Da $\omega x = v$ die Umfangsgeschwindigkeit der Drehung an der Stelle P ist, so ist die Höhe y dieses Punktes über dem tiefsten Punkt A, nach der zweiten Fassung der Gl. 3, gleich der Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ der Drehgeschwindigkeit ωx des Punktes.

Fig. 226.



Um den Druck p an irgend einem Punkte Q der sich drehenden Flüssigkeit zu ermitteln, trennen wir (Fig. 226) ein lothrechtes, von Q bis zur Oberfläche reichendes Prisma heraus. An dessen Grundfläche dF wirkt die Druckkraft $p \cdot dF$ aufwärts; diese muss gleich dem Gewichte $\gamma \cdot dF \cdot z$ des Prismas sein, wenn Q in der lothrechten Tiefe z unter der Oberfläche liegt. Die

Centrifugalkraft des Prismas kommt in der Gleichung der lothrechten Kräfte nicht vor, also ist

4) $$p = \gamma z.$$

Für überall gleiche z bekommt auch p überall denselben Werth. Flächen gleichen Druckes haben also in allen Punkten gleiche lothrechte Tiefe unter der Oberfläche, d. h. dieselbe Form MN wie die Oberfläche CD; sie sind nur in lothrechtem Sinne dagegen verschoben.

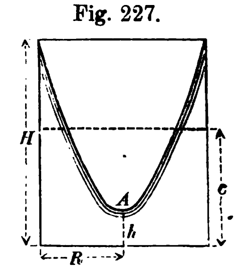
Liegt der tiefste Punkt A der Oberfläche um h über dem Boden, so tritt der stärkste Druck im Gefässe bei B auf und hat die Grösse

5) $$p_1 = \gamma \cdot \overline{BC} = \gamma\left(h + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right),$$

wenn r der Drehungshalbmesser von B oder C ist.

Beispiel: Ein cylindrisches Gefäss (Fig. 227) von der Weite $2R$ und der Tiefe H sei ursprünglich auf eine Höhe c mit ruhender Flüssigkeit gefüllt. Wie gross muss die Drehungsgeschwindigkeit $v = \omega R$ am Umfange werden, damit die Flüssigkeit bis zum Rande steige?

Fig. 227.



Bildet sich bei der Drehung im Gefäss ein vollständiges Paraboloid als Oberfläche, liegt also der tiefste Punkt A des Paraboloides noch um h über dem Boden, so ist, weil der Inhalt eines Paraboloides (nach 1. Theil, 2. Aufl., S. 140) halb so gross wie der des umschriebenen Cylinder ist, die Flüssigkeitsmenge im Gefässe

$$R^2\pi\,(H - {}^1\!/_2\,(H - h)) = {}^1\!/_2\,R^2\pi\,(H + h);$$

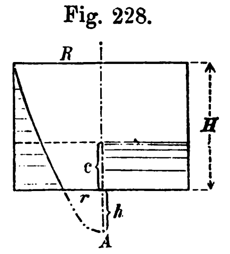
diese muss $= R^2\pi c$, also $H + h = 2c$ sein. Nach Gl. 3 ist aber

$$H - h = \frac{v^2}{2g}; \text{ mithin}$$

$$2H = 2c + \frac{v^2}{2g} \text{ oder}$$

6) $$\frac{v^2}{2g} = 2\,(H - c).$$

Fig. 228.



Gleichung 6 gilt nur, so lange $c \geqq {}^1\!/_2 H$. Für $c = {}^1\!/_2 H$ wird nämlich $h = 0$. — War das Gefäss aber anfänglich weniger als zur Hälfte gefüllt, also $c < {}^1\!/_2 H$, so kommt, wenn die Flüssigkeit zum oberen Rande steigt, der untere Theil des Paraboloids mit dem Punkte A nicht mehr zur Ausbildung. Der Flüssigkeitskörper nimmt eine Querschnittsform an, wie sie in Fig. 228 links gezeichnet ist, während die rechte Hälfte der Figur den Ruhezustand darstellt.

Nach Fig. 228 berechnet sich der Flüssigkeitsinhalt zu $V = R^2 \pi H - \frac{1}{2} R^2 \pi (H + h) + \frac{1}{2} r^2 \pi h = R^2 \pi c$. Wegen $r^2 : R^2 = h : (H + h)$ wird

$$\frac{R^2 H}{2} - \frac{R^2 h}{2} + \frac{R^2 h^2}{2(H+h)} = R^2 c \quad \text{oder}$$

$$H^2 = 2c(H+h), \quad \text{und}$$

$$\text{weil} \quad \frac{v^2}{2g} = H + h \quad \text{ist,}$$

7) $$\frac{v^2}{2g} = \frac{H^2}{2c}; \quad h = \frac{v^2}{2g} - H.$$

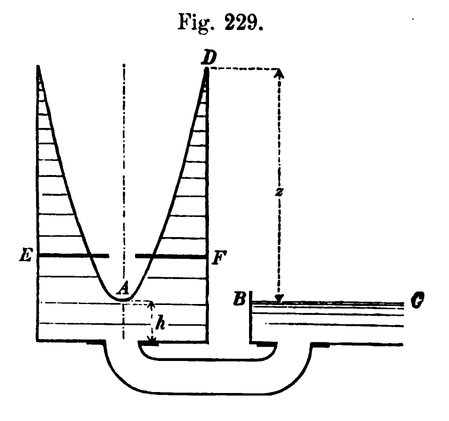
Für $c > \frac{1}{2} H$ gilt Gl. 6, für $c < \frac{1}{2} H$ Gl. 7, für $c = \frac{1}{2} H$ geben beide Gleichungen übereinstimmend $\frac{v^2}{2g} = H$.

Für $c = \frac{2}{3} H$ giebt Gl. 6: $\frac{v^2}{2g} = \frac{2}{3} H$; der Punkt A (Fig. 227) bleibt um $h = \frac{1}{3} H$ über dem Boden.

Für $c = \frac{1}{3} H$ giebt Gl. 7: $\frac{v^2}{2g} = \frac{3}{2} H$; der tiefste Punkt A des nach unten fortgesetzten Paraboloides liegt (Fig. 228) um $\frac{1}{2} H$ unter dem Boden; ferner wird $r^2 : R^2 = \frac{1}{3}$, oder $r = 0{,}577\, R$.

In den vorstehenden Beispielen wurde eine bestimmte Flüssigkeitsmenge in dem Gefässe angenommen, so dass das Steigen am Umfange eine Senkung in der Mitte zur Folge haben musste. Steht aber (Fig. 229) die Mitte des Bodens des cylindrischen Gefässes, in welchem das Wasser durch Flügel in Drehung um die lothrechte Achse des Gefässes versetzt wird (die Flügel sind in der Figur fortgelassen), durch eine Röhre mit einem grösseren Gefässe in Verbindung, so wird der Punkt A mit dem Wasserspiegel BC in gleicher Höhe liegen müssen, wenn das Wasser im Verbindungsrohr in Ruhe bleiben soll. Bei einer Umfangsgeschwindigkeit v des Wassers am Rande wird dann dessen höchster Punkt D um $z = \frac{v^2}{2g}$ über BC liegen, so dass die Vorrichtung ein Mittel darstellt, Wasser zu heben. Bringt man etwas

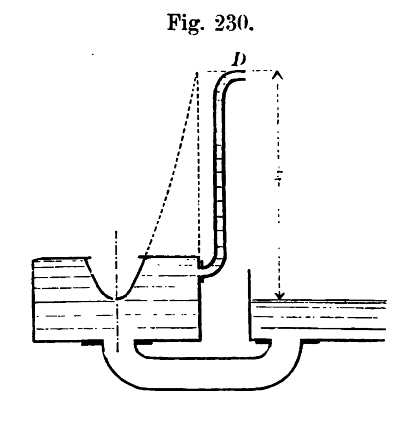
Fig. 229.



unterhalb D einen Überlauf an, so hat man eine Art von Kreiselpumpe. Doch genügt die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gz}$ noch nicht zu deren Betriebe, d. h. zur Bewegung des Wassers durch die Pumpe hindurch, sondern nur zum Halten des Wassers im gehobenen Zustande. Für den Betrieb, für wirkliche Wasserförderung würde eine grössere Geschwindigkeit v erforderlich sein, deren Entwickelung aber über den Rahmen dieses Buches hinausgeht.

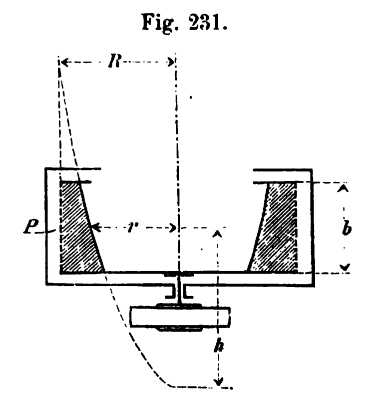
In den Druckverhältnissen des flüssigen Körpers (Fig. 229) wird nichts geändert, wenn man bei EF eine Platte einschiebt, sie mit dem Gefässmantel fest verbindet und den darüber befindlichen Theil des Gefässes und der Flüssigkeit fortnimmt. Es entsteht dann eine Vorrichtung (Fig. 230), bei welcher der am Umfange herrschende Druck sich dadurch bemerkbar machen wird, dass das Wasser in einem seitlichen Rohre sich bis D über das Unterwasser erheben wird, wenn $v = \sqrt{2gz}$ gemacht wird.

Fig. 230.



Der starke Druck, der sich durch grosse Umfangsgeschwindigkeit erzeugen lässt, findet Anwendung bei den Schleudermaschinen (Centrifugen), welche zum Auspressen des Wassers aus nasser Wäsche, des Saftes aus Zuckerrüben-Brei u. dgl. benutzt werden. Bei diesen Maschinen (Fig. 231) wird der innere, mit durchlöcherter Wandung versehene Cylinder durch eine von unten mit ihm verbundene Welle in so schnelle Drehung gesetzt, dass von der paraboloidischen Oberfläche nur ein kleines, sehr steil ansteigendes Stück zur Ausbildung gelangt. Als flüssigen Körper wollen wir uns Rübenmasse denken, welche den schraffirten ringförmigen

Fig. 231.



Körper bildet, der annäherungsweise als ein Ring von der Wandstärke $R - r$ angesehen werden kann. Der drehbare Cylinder (die Trommel) ist von einem festen Gehäuse umgeben, in welches der Saft durch die Öffnungen des Mantels eintritt. Der Druck an dem Punkte P der Trommel beträgt

$$p = \gamma\left(\frac{v^2}{2g} - h\right) \text{ oder}$$

weil (nach Gl. 3) $h = \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}\frac{r^2}{R^2}$ ist,

8) $$p = \gamma \frac{v^2}{2g}\frac{R^2 - r^2}{R^2}.$$

Ist b die Höhe der Trommel, so ist der stärkste Druck am unteren Rande noch um $\frac{1}{2}\gamma b$ grösser; doch ist dieser Unterschied unbedeutend.

Beträgt ferner das Gewicht der eingefüllten Rübenmasse $Q = \gamma(R^2 - r^2)\pi b$, so kann

$$p = \frac{Q}{R^2 \pi b}\frac{v^2}{2g}$$

geschrieben werden oder, wenn man den Inhalt der ganzen Trommel $R^2 \pi b = V$ setzt, auch

9) $$p = \frac{Q}{V}\frac{v^2}{2g}.$$

Der Druck p ist also mit der Ladung Q der Trommel verhältnisgleich.

Beispiel: Für eine Schleudermaschine sei $R = 0{,}5$ m, $b = 0{,}5$ m, die Ladung $Q = 160$ kg, der Rauminhalt $V = 0{,}5^2 \pi \cdot 0{,}5 = 0{,}393$ cbm. Die Maschine mache 1000 Umdrehungen in der Minute, dann ist $v = \frac{1}{6} \cdot 314 = 52{,}3$ m/sek., also $\frac{v^2}{2g} = 140$ m und $p = \frac{160}{0{,}393} \cdot 140 = 57\,000$ kg/qm $= 5{,}7$ kg/qcm $= 5{,}7$ at. Die Wandung der Trommel muss also einen inneren Druck von $5{,}7$ at aushalten. Das Mantelblech erfährt eine Spannung $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, worin $\sigma_1 = 2\gamma_1 \frac{v^2}{2g}$ (s. S. 102, Gl. 4) durch die eigene Masse des Bleches, $\sigma_2 = p\frac{R}{\delta}$ (s. S. 175, Gl. 2) durch den inneren Druck p entsteht. Ist $\gamma_1 = 7800$ kg/cbm, $\delta = 5$mm $= 0{,}005$ m, so wird

$$\sigma_1 = 2 \cdot 7800 \cdot 140 = 2\,184\,000$$
$$\sigma_2 = 57\,000 \cdot 100 = 5\,700\,000$$
$$\sigma = 7\,884\,000 \text{ kg/qm}$$

oder $\sigma = 788$ at. Diese erhebliche Anspannung macht es erklärlich, dass

derartige Schleudermaschinen in ähnlicher Weise wie Dampfkessel einer sorgfältigen Überwachung unterliegen; besonders muss mit Rücksicht auf Gl. 9 eine Überladung (zu grosses Q) vermieden werden.

3. Gleichgewicht gasförmiger Flüssigkeiten.

Während tropfbar flüssige Körper nahezu unveränderlichen Rauminhalt zeigen, ist der Rauminhalt der Gase in hohem Maſse veränderlich. Wie man das Verhalten elastisch-fester Körper mit Hülfe von Elasticitätsgesetzen beurtheilen konnte, so giebt es für Gase einfache Gesetze, denen ihr äusseres Verhalten unterworfen ist. Eine Änderung des Rauminhaltes einer Gasmenge kann erfolgen. durch eine Änderung seiner Temperatur oder seines Druckes oder auch beider zugleich; die Beziehung zwischen diesen Grössen heisst die Zustandsgleichung.

Es empfiehlt sich, die allgemeinen Gesetze über die Raumänderung auf eine bestimmte Menge eines Gases, nämlich auf 1^{kg} zu beziehen. Der Rauminhalt, den 1^{kg} eines Gases in irgend einem Zustande einnimmt, heisst der Einheitsraum oder das specifische Volumen und wird mit v bezeichnet. Die Dichte, d. h. das Gewicht von 1^{cbm} wird auch hier mit γ bezeichnet. Da nun Dichte mal Rauminhalt gleich dem Gewichte ist, so wird $\gamma \cdot v$ das Gewicht des Einheitsraumes v, d. h. $\gamma v = 1^{kg}$ sein. Es besteht also die Grundgleichung:

1) $$\gamma v = 1 \quad \text{oder} \quad v = 1 : \gamma.$$

a) Der Boyle-Mariotte'sche Satz.

Bei gleichbleibender Temperatur ändert sich die Dichte eines Gases verhältnisgleich mit dem Drucke, der Einheitsraum also umgekehrt verhältnisgleich mit dem Drucke.

Beziehen sich nämlich Druck p_1, Einheitsraum v_1 und Dichte γ_1 auf einen Anfangszustand und p, v, γ auf einen anderen Zustand eines Gases, so ist zufolge der Erfahrung

2) $$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{p}{p_1} = \frac{v_1}{v},$$

oder es ist (nach Gl, 1) $p\,v = \frac{p}{\gamma}$ eine unveränderliche Grösse, solange die Temperatur unverändert erhalten wird.

Dies Verhalten der Gase ist vom Engländer Boyle (geb. 1626 zu Lismore in Irland, gest. 1691 zu London) im Jahre 1662 entdeckt, 1679 von dem Franzosen Mariotte (geb. 1620 zu Bourgogne, gest. zu Paris 1684) durch viele Versuche bestätigt worden und wird meist nach Letzterem benannt.

Wird also ein Gas auf $^1/_5$ seines ursprünglichen Raumes zusammengedrückt, mithin seine Dichte um das Fünffache vergrössert, so erhöht sich sein Druck ebenfalls auf das Fünffache — jedoch nur unter der Voraussetzung, dass das Gas nachher dieselbe Temperatur zeigt wie vorher.

In den meisten Fällen findet beim Zusammendrücken eine Temperatur-Erhöhung statt, in Folge dessen der Satz dann nicht gültig ist. Nur wenn man durch besondere Vorkehrungen die Temperatur-Änderung verhindert, darf der Satz zur Anwendung gebracht werden

b) Druckverhältnisse der Atmosphäre bei überall gleicher Temperatur.

Die Atmosphäre übt auf alle mit ihr in Berührung befindlichen Körper einen Druck aus, der in der Höhe des Meeresspiegels im Mittel $p_0 = 10333\,^{kg}/_{qm}$ beträgt. Man kann sich hiervon überzeugen, wenn man (Fig. 232) einen Kolben in einem Cylinder vom Querschnitt F bei geöffnetem Hahne h abwärts schiebt, bis sämmtliche Luft unter dem Kolben entfernt ist, und dann nach Schliessung des Hahnes den Kolben in die Höhe zu ziehen versucht. Es setzt sich dem, abgesehen von Reibungswiderständen, ein Widerstand $K = p_0 F$ entgegen, der nur von der Wirkung der Luft auf die obere Kolbenfläche herrühren kann.

Fig. 232.

K, p_0 F h

$1\,^{cbm}$ Luft hat bei diesem Drucke p_0 und bei 0° C. ein Gewicht $\gamma_0 = 1{,}293\,^{kg}$.

Fig. 233.

dz dG p G z p_0

Ebenso wie im Wasser muss auch in der Luft der Druck nach oben hin abnehmen, allerdings nach einem anderen Verhältnisse, weil die Dichte der Luft veränderlich ist. Betrachten wir eine Luftsäule von $1\,^{qm}$ Querschnitt, die vom Meeresspiegel lothrecht in die Höhe sich erstreckt (Fig. 233), so kann man nach S. 168 auch auf diese die Gleichgewichts-Bedingungen für starre Körper

anwenden. Ist p der Luftdruck in einer Höhe z über dem Meeresspiegel, so wirken an der Luftsäule von der Höhe z die lothrechten Kräfte p_0, p und das Gewicht G; die Seitendrücke kommen nicht in Frage, wenn wir p berechnen wollen. Es ist demnach

1) $$p = p_0 - G.$$

Wäre die Dichte überall γ_0, so könnte man $G = \gamma_0 z$ setzen; dies ist aber hier nicht zulässig, weil mit p auch γ nach oben hin abnimmt. Die Differentiation der Gl. 1 nach z giebt

$$\frac{dp}{dz} = 0 - \frac{dG}{dz}.$$

Nennt man γ die Dichte der Luft in der Höhe z, so ist dG das Gewicht eines Höhentheilchens dz der Säule, daher $dG = \gamma\, dz$. Hiernach wird

2) $$dp = -\gamma\, dz.$$

Weil nun nach dem Boyle'schen Satze (Gl. 2, S. 212) $\gamma : \gamma_0 = p : p_0$ ist, so folgt

$$dp = -\frac{\gamma_0}{p_0} p\, dz, \quad \text{oder}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\gamma_0}{p_0} dz.$$

Die Integration dieser Gleichung ergiebt:

$$\mathfrak{l}(p) = -\frac{\gamma_0}{p_0} z + C.$$

Nennt man p_1 und p_2 die Atmosphärendrücke in den Höhen z_1 und z_2 über dem Meeresspiegel, so wird

$$\mathfrak{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -\frac{\gamma_0}{p_0}(z_1 - z_2) = \frac{\gamma_0}{p_0}(z_2 - z_1),$$

oder der Höhenunterschied $h = z_2 - z_1$, der dem Verhältnisse $p_1 : p_2$ entspricht:

3) $$h = \frac{p_0}{\gamma_0}\mathfrak{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

Diese Formel kann zum barometrischen Höhenmessen benutzt werden, freilich nur als erste Annäherung, weil darin überall gleiche Temperatur der Luftsäule angenommen ist.

Für 0° C. ist

$$p_0 : \gamma_0 = 10333 : 1{,}293 = 7992^{\text{m}},$$

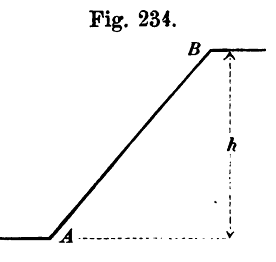
wofür man mit genügender Annäherung 8000^{m} schreiben darf. Will man sich Briggischer Logarithmen bedienen, so hat man, weil

der natürliche Log. grösser ist als der Briggische, noch den Faktor 2,302 59 = l 10 hinzuzufügen und erhält rund

4) $$h = 18\,400\,(\log p_1 - \log p_2).$$

Es ist für die Anwendung dieser Gleichung nicht erforderlich, dass die beiden Punkte, deren Höhenunterschied man ermitteln will, in einer Lothrechten liegen. Die Gleichung ist ebenso gut auf die Punkte A und B (Fig. 234) anwendbar, wenn nur zwischen beiden ein schräges Luftprisma gleicher Temperatur im Ruhezustande sich befindet. Der Luftdruck wird bekanntlich mittels Barometers durch eine Quecksilbersäule ausgedrückt. Da der Luftdruck mit jener Säule verhältnisgleich ist, so kann man in dem Verhältnisse $p_1 : p_2$ unmittelbar die Barometer-Ablesungen anstatt der Drücke benutzen.

Fig. 234.



Beispiel 1: Es sei $p_1 = 749{,}2^{\text{mm}}$, $p_2 = 692{,}7^{\text{mm}}$ Quecksilbersäule, dann ist

$$h = 18\,400\,(\log 749{,}2 - \log 692{,}7) = 628^{\text{m}}.$$

Später (S. 224) werden wir dasselbe Beispiel mit Rücksicht auf verschiedene Temperaturen in A und B behandeln.

Beispiel 2: Auf S. 8 wurde statt des Druckes von $1{,}0333^{\text{kg}}/_{\text{qcm}} = 10\,333^{\text{kg}}/_{\text{qm}}$ für die Atmosphäre der runde Werth von $1^{\text{kg}}/_{\text{qcm}} = 10\,000^{\text{kg}}/_{\text{qm}}$ eingeführt. Es soll mittels der Gl. 4 berechnet werden, in welcher Höhe über dem Meere dieser Druck bei 0° C. etwa stattfindet.

Hiernach ergiebt sich

$$h = 18\,400\,(\log 10\,333 - \log 10\,000) = 264^{\text{m}},$$

d. i. etwa die Höhe von Ilsenburg am Fusse des Brockens (s. 1. Theil, 2. Aufl., S. 94).

Zu einem Höhenunterschiede $h = 100^{\text{m}}$ gehört nach Gl. 4 ein Werth

$$\log\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{100}{18\,400} = 0{,}005\,434\,8,$$

oder $p_1 : p_2 = 1{,}012\,59$. In dem gleichen Verhältnis ändert sich auch die Dichte, d. h. nur um etwa $^1/_{80}$. Man kann daher für alle Fälle, bei denen es nicht auf grosse Genauigkeit ankommt, für Luftsäulen bis zu 100^{m} Höhe die Dichte als überall gleich betrachten.

Mit überall gleicher Dichte $\gamma = 1{,}293$ gerechnet, würde auf 100^{m} Höhe ein Unterschied des Luftdrucks von $129{,}3^{\text{kg}}/_{\text{qm}}$ sich ergeben; wenn also $p_1 = 10\,333$, so würde $p_2 = 10\,204$, und das Verhältnis $p_1 : p_2 = 1{,}012\,64$, welches von dem obigen genaueren Werthe nur sehr wenig abweicht.

Diese Übereinstimmung hängt auch damit zusammen, dass in der Reihe

$$\mathfrak{l}\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \ldots$$

für kleine x annähernd $\mathfrak{l}\,(1+x) = x$ ist, so dass, wenn also $p_1 : p_2$ nur wenig von 1 verschieden ist,

$$\mathfrak{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{p_1}{p_2} - 1 = \frac{p_1 - p_2}{p_2}$$

gesetzt werden kann. Damit geht, wenn man $p_1 = p_0$ setzt, Gl. 3 über in

$$h = \frac{p_0}{\gamma_0}\,\frac{p_0 - p_2}{p_2} = \frac{p_0 - p_2}{\gamma_2} \quad \text{(annähernd).}$$

c) Auftrieb der Luft. Luftballon.

In genau derselben Weise wie bei einem von Wasser umgebenen Körper ergiebt sich auch für die von der Luft umhüllten Körper ein Auftrieb der Luft, gleich und entgegengesetzt dem Gewichte der verdrängten Luftmasse. Genau genommen, muss bei der Ermittelung des Gewichtes und des Schwerpunktes der verdrängten Luftmasse auf die Veränderlichkeit der Dichte Rücksicht genommen werden. Hat aber der verdrängende Körper keine sehr grosse Höhenausdehnung, so kann man nach S. 215, für seinen Bereich, die Dichte γ der Luft meist als überall gleich ansehen und demgemäss den Auftrieb (wie auf S. 194)

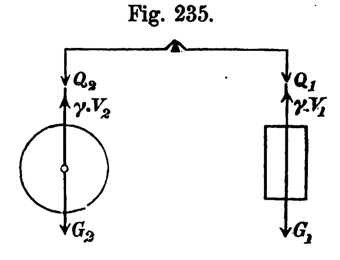
1) $$A = \gamma V$$

setzen, wenn V der Rauminhalt des Körpers ist.

Da die Dichte γ der Luft mit der Höhe abnimmt, wird auch der Auftrieb A mit zunehmender Höhe immer geringer.

Wägt man also von Luft umgebene Körper (Fig. 235), so wird, wenn der Zeiger der Waage auf Null steht, dadurch nicht die Gleichheit der wahren Gewichte und somit der Massen beider Körper, sondern die Gleichheit der scheinbaren Gewichte (s. S. 195) bewiesen. Auf der rechten Seite wirkt auf die Waage $Q_1 = G_1 - \gamma V_1$, auf der linken Seite $Q_2 = G_2 - \gamma V_2$. Ist $V_2 > V_1$, so muss $G_2 > G_1$ sein, wenn $Q_1 = Q_2$ ist.

Fig. 235.



Bringt man die Waage unter die Glocke einer Luftpumpe und vermindert durch allmähliches Auspumpen der Luft die Dichte γ, so wird Q_2 schneller zunehmen

als Q_1, der Körper von grösserem Rauminhalt und geringerer Dichte also sinken.

Beispiel: Ein Körper von Holz ($\gamma_2 = 750$ kg/cbm) werde in der Luft ($\gamma = 1{,}3$) mit einem Gewichtstücke von Eisen ($\gamma_1 = 7500$) so abgewogen, dass der Zeiger der Waage auf Null zeigt. Welches ist das Verhältnis der beiden Massen? Die Waage beweist

$$V_1\,(7500 - 1{,}3) = V_2\,(750 - 1{,}3).$$

Daher ist

$$\frac{V_2\,750}{V_1\,7500} = \frac{7500 - 1{,}3}{(750 - 1{,}3)\,10} = 1{,}00156.$$

In diesem Verhältnis ist die Masse des Holzkörpers grösser als die des eisernen Gewichtstückes.

Bei feinen Wägungen muss daher, besonders bei sehr leichten Körpern, die augenblickliche Dichte der Luft berücksichtigt werden.

Luftballon. Ist das Gewicht eines Körpers kleiner als der Auftrieb der ihn umgebenden Luft, so tritt an die Stelle des scheinbaren Gewichtes eine Steigkraft $K = \gamma V - G$. Bedeutet V den Rauminhalt eines mit leichtem Gase von der Dichte γ' (bei 0° C. und mittlerem Atmosphärendrucke $p_0 = 10333$ kg/qm) gefüllten Ballons, so wird, wenn das Gewicht der Gasfüllung $\gamma' V$ besonders eingeführt und G' das Gewicht aller übrigen Theile (Hülle, Tauwerk, Gondel, Ausrüstung, Besatzung, Ballast) ist, deren Rauminhalt gegenüber V vernachlässigt werden darf, die Steigkraft bei der Stellung dicht über dem Erdboden

2) $$K_0 = V(\gamma - \gamma') - G'.$$

Beim Steigen nimmt der Druck und die Dichte der Luft ab. Wäre der Ballon fest geschlossen und undehnbar, so würde die Dichte γ' des Gases unverändert erhalten. Es bliebe dann aber, wenn wir überall gleiche Temperatur in der Luft annehmen, der innere Druck so gross wie zu Anfang, d. h. grösser als der verminderte äussere Luftdruck in der erstiegenen Höhe. Einem solchen inneren Ueberdrucke darf man wegen der Gefahr des Zerreissens den Ballon nicht aussetzen. Deshalb wird an der Hülle des Ballons ein Sicherheits-Ventil angebracht, welches so eingerichtet ist, dass es den Druck im Inneren nicht erheblich über den Aussendruck steigen lässt. In Folge dessen wird dann auch die Dichte des Gases sich in gleichem Verhältnisse mit dem äusseren Druck ändern.

Ist der Luftdruck am Boden p_1, in einer Höhe h aber p_2, so beträgt in dieser Höhe die Steigkraft noch:

$$3) \qquad K = V(\gamma - \gamma')\frac{p_2}{p_1} - G'.$$

Die Steigkraft hört auf, wenn

$$V(\gamma - \gamma')\frac{p_2}{p_1} = G' \text{ oder}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V(\gamma - \gamma')}{G'}$$

geworden ist. Dem entspricht bei einer überall gleichen Temperatur von 0° C. eine Steighöhe (Gl. 4, S. 215)

$$4) \qquad h = 18\,400 \log\left(\frac{V(\gamma - \gamma')}{G'}\right).$$

Beispiel: Ein Ballon von 700 cbm Rauminhalt werde mit Leuchtgas von der Dichte $\gamma' = 0{,}45$ gefüllt. Das Gewicht der Hülle, des Tauwerks, der Gondel, der Ausrüstung, des Ballastes und der Besatzung betrage $G' = 500$ kg, dann ergiebt sich die Steigkraft über dem Erdboden (Gl. 2) zu

$$K_0 = 700\,(1{,}29 - 0{,}45) - 500 = 88 \text{ kg}.$$

Diese Grösse hat die Spannkraft des Haltetaues, welches den Ballon am Boden festhält. Die Steighöhe des Ballons wird nach Gl. 4:

$$h = 18\,400 \log\frac{V(\gamma - \gamma')}{G'}$$

$$= 18\,400 \log 1{,}176 = 1295 \text{ m}.$$

Bei Füllung mit Wasserstoff ($\gamma' = 0{,}09$) wird $K_0 = 340$ kg, $h = 4146$ m. (Vgl. a. S. 225.)

d) Satz von Gay-Lussac. Zustandsgleichung der vollkommenen Gase.

Der Satz des französischen Physikers Gay-Lussac (geb. 1778 zu Leonard, gest. 1850 zu Paris), aufgestellt im Jahre 1802, bezieht sich auf die Ausdehnung der Gase durch Temperatur-Erhöhung bei gleichbleibendem Drucke.

Fig. 236.

a b c

p_0 0^0 v_0 — p_0 t v_1 — p t v

Wird 1 kg Gas von 0° C. Temperatur, vom Rauminhalte v_0 und dem Drucke p_0 (Fig. 236, a) auf t^0 C. unter gleichbleibender Kolbenbelastung, d. h. gleichbleibendem Drucke p_0 erwärmt, so erfolgt eine

Ausdehnung auf den Einheitsraum v_1 (Fig. 236, b) und es ist das Ausdehnungs-Verhältnis

$$1)\qquad \frac{v_1 - v_0}{v_0} = \alpha t \quad \text{oder} \quad v_1 = v_0 (1 + \alpha t),$$

worin α, die **Ausdehnungsziffer**, nicht allein für ein bestimmtes Gas unveränderlich ist, sondern sogar für alle Gase denselben Zahlenwerth

$$\alpha = 0{,}003\,665 = 1:273$$

hat. Gl. 1 ergiebt den Satz von Gay-Lussac: Die Ausdehnung eines Gases ist verhältnisgleich der Temperatur-Erhöhung.

Verstärkt man nun den Druck des Gases durch Erhöhung der Kolbenbelastung auf p, so wird der Einheitsraum sich auf v vermindern (Fig. 236, c) und wenn man diese Änderung künstlich so regelt, dass bei ihr keine Änderung der Temperatur des Gases erfolgt, so gilt für sie der Boyle'sche Satz

$$2)\qquad v : v_1 = p_0 : p .$$

Verbindet man die Gl. 1 und 2, so entsteht

$$p\,v = p_0 v_0 (1 + \alpha t) = p_0 v_0 \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t\right),$$

oder mit Einführung des Zahlenwerthes für α

$$p\,v = \frac{p_0 v_0}{273} (273 + t).$$

Bei einem bestimmten Drucke p_0 und einer Temperatur von 0^0 C. hat nun 1^{kg} eines Gases einen bestimmten Raum v_0, daher ist $p_0 v_0 : 273$ für ein bestimmtes Gas eine gegebene Grösse, die mit R bezeichnet wird, also

$$3)\qquad R = \frac{p_0 \cdot v_0}{273} \quad \text{und demgemäss}$$

$$4)\qquad p v = R (273 + t).$$

Für $t = -273$ wird die rechte Seite und somit $p v = 0$. Da der Raum von 1^{kg} Gas nicht wohl Null werden kann, so muss $p = 0$ werden; d. h. bei einer Temperatur von -273^0 C. würde der Druck p und somit das Ausdehnungs-Bestreben des Gases aufhören, wenn die Erfahrungssätze von Boyle und Gay-Lussac noch für Wärme-

grade, die von den Temperaturen der Versuche so weit entfernt liegen, gültig wären. Diese Temperatur von — 273° C. nennt man den absoluten Nullpunkt und bezeichnet die nach Celsius-Graden von diesem Nullpunkt aus gezählte Temperatur

5) $$T = 273 + t$$

als die absolute Temperatur. Man erhält die absolute Temperatur eines Körpers in Celsius-Graden, indem man zu seiner vom Gefrierpunkte des Wassers aus gezählten Temperatur t in Celsius-Graden 273 hinzuzählt. Dem Gefrierpunkte des Wassers $t = 0^0$ entspricht die absolute Temperatur $T = 273^0$.

Mit Gl. 5 erhält nun Gl. 4 die überraschend einfache Form

6) $$p v = R T.$$

Diese Gleichung heisst die Zustandsgleichung der Gase. Sie gilt für die Gase ziemlich genau, so lange sich dieselben weit vom Verflüssigungspunkte befinden, während in der Nähe desselben sich erhebliche Abweichungen zeigen. In den folgenden Anwendungen auf Luft und andere Gase setzen wir eine vollkommene Gültigkeit der Gl. 6 voraus und nennen die Gase in diesem Sinne vollkommene Gase, indem wir uns vorstellen, das Gas sei unendlich weit von der Verflüssigung entfernt.

Den Festwerth R findet man, indem man Gl. 6 auf einen bestimmten Zustand p, v, T anwendet. Da nun trockene atmosphärische Luft bei $t = 0^0$ C. oder $T = 273^0$ und bei einem Drucke $p_0 = 10333\,{}^{kg}/_{qm}$ eine Dichte $\gamma_0 = 1{,}293$, daher einen Einheitsraum $v_0 = 1 : 1{,}293$ hat, so wird für trockene Luft:

$$R = \frac{10333}{1{,}293 \cdot 273} = 29{,}27\,.$$

Für mittelfeuchte Luft ist $R = 29{,}37$,
„ Wasserdampf $R = 46{,}95$,
„ Kohlensäure $R = 19{,}20$.

Wird eine Luftmenge fest eingeschlossen, so dass sie sich nicht ausdehnen kann, so muss v unverändert bleiben. Erhöht man nun die Temperatur, so muss nach Gl. 6 der Druck p verhältnisgleich der absoluten Temperatur T sich ändern:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{T}{T_1}.$$

War zu Anfang $T_1 = 0 + 273$, nachher $T = 100 + 273 = 373$, so wird

$$\frac{p}{p_1} = \frac{373}{273} = 1{,}366.$$

Hatte die Luft ursprünglich den Atmosphärendruck, so wird sie nach Erhöhung der Temperatur um 100^0 einen Druck von 1,366 Atmosphären ausüben. Hierauf beruht die Heissluftmaschine.

Bleibt die Luftmenge aber einem gleichbleibenden Druck p unterworfen, so wird sie bei einer Temperaturerhöhung sich ausdehnen, u. zw. wird nach Gl. 6 der Einheitsraum v mit der absoluten Temperatur T verhältnisgleich sich ändern:

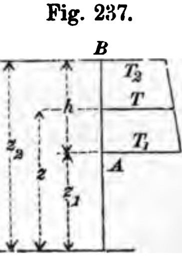
$$\frac{v}{v_1} = \frac{T}{T_1}.$$

Bei einer Temperatur-Erhöhung von $0 + 273$ auf $100 + 273$ wird also v auf das 1,366 fache wachsen. Betrug die Dichte ursprünglich $\gamma_1 = 1{,}293$, so wird sie abnehmen auf $\gamma = 1{,}293 : 1{,}366 = 0{,}9466$. Auf dieser Verdünnung der Luft durch Erwärmung beruht bekanntlich der Luftballon von Mongolfier (1783), sowie das Aufsteigen warmer Luft in kalter.

e) Barometrisches Höhenmessen.

Der Grundgedanke davon ist schon auf S. 215 behandelt worden. Die dort entwickelten Gleichungen setzen überall gleiche Temperatur von 0^0 C. voraus. Hier soll nun auch der Einfluss einer veränderlichen Temperatur berücksichtigt werden.

Fig. 237.



Für ein Lufttheilchen von der Höhe dz galt die Gleichgewichts-Bedingung (S. 214, Gl. 2)

$$dp = -\gamma dz;$$

setzt man darin nach Gl. 1, S. 212 und Gl. 6, S. 220

$$\gamma = \frac{1}{v} = \frac{p}{RT}, \quad \text{so folgt}$$

1) $$dp = -\frac{p}{RT} dz.$$

Das Gesetz, nach welchem die Lufttemperatur T zwischen zwei

Punkten A und B (Fig. 237) sich ändert, ist nicht genau bekannt; wir setzen dafür als genügende Annäherung die lineare Beziehung:

2) $$T_1 - T = \tau (z - z_1);$$

darin bedeutet

3) $$\tau = \frac{T_1 - T_2}{z_2 - z_1}$$

die Temperaturabnahme nach oben auf 1 m Höhe.

Nun wird nach Gl. 2

$$dT = -\tau dz, \quad \text{oder:} \quad dz = -\frac{dT}{\tau}.$$

Setzt man dies in Gl. 1 ein, so entsteht

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{R\tau} \frac{dT}{T};$$

mithin wenn man zwischen den Grenzen p_2 und p_1 bezw. T_2 und T_1 integrirt:

4) $$\mathfrak{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{1}{R\tau} \mathfrak{l}\left(\frac{T_1}{T_2}\right).$$

oder nach Fig. 237 und Gl. 3 und 4:

$$h = z_2 - z_1 = \frac{T_1 - T_2}{\tau} = R(T_1 - T_2) \frac{\mathfrak{l} p_1 - \mathfrak{l} p_2}{\mathfrak{l} T_1 - \mathfrak{l} T_2}.$$

Für das Verhältnis der natürlichen Logarithmen kann man auch das der Briggischen setzen, also

5) $$h = R(T_1 - T_2) \frac{\log p_1 - \log p_2}{\log T_1 - \log T_2}.$$

Für trockene Luft wurde auf S. 220 der Festwerth $R = 29{,}27$ ermittelt. Für feuchte Luft ändert sich diese Zahl. Für die Verhältnisse Deutschlands kann man mittelfeuchte Luft annnehmen, also in obiger Formel $R = 29{,}37$ setzen.

Annäherungs-Rechnung: Gewöhnlich behandelt man behufs barometrischen Höhenmessens die Temperatur der Luftsäule nicht als veränderlich, sondern als überall gleich dem Mittel aus der oberen Temperatur T_2 und der unteren Temperatur T_1, setzt demnach in Gl. 1

$$T = {}^1/_2 (T_1 + T_2)$$

und bekommt

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{RT} dz, \quad \text{oder} \quad dz = -R \cdot T \cdot \frac{dp}{p},$$

woraus nach Integration zwischen den Grenzen p_2 und p_1 folgt:

6) $$h = R\,T\,\mathrm{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = R\,T \cdot 2{,}302585\,(\log p_1 - \log p_2)$$

und mit $R = 29{,}37$

7) $$h = 67{,}63\,T(\log p_1 - \log p_2).$$

Eine bequemere Zahlenrechnung für h erhält man wie folgt:

Nach S. 216 ist angenähert

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} \quad \text{und nach S. 221}$$

$$\gamma = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{p_1 + p_2}{2} \cdot \frac{1}{R \cdot T},$$

wenn $p = {}^1/_2\,(p_1 + p_2)$ gesetzt wird.

Die Verbindung dieser zwei Gleichungen ergiebt

$$h = 2\,R\,T\,\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} = 58{,}74\,T\,\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}.$$

Führt man statt T die gewöhnliche Temperatur $(273 + t)$ ein, worin $t = {}^1/_2\,(t_1 + t_2)$ ist, so ergiebt sich auch

$$h = 58{,}74\,(273 + t)\,\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} = 58{,}74 \cdot 273\left(1 + \frac{t}{273}\right)\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2},$$

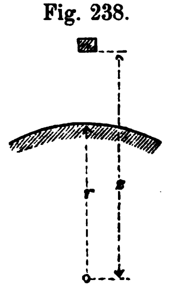
oder $$h = 16\,036\,(1 + 0{,}003665\,t)\,\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}$$

und abgerundet, mit genügender Genauigkeit,

8) $$h = 16\,000\,(1 + 0{,}004\,t)\,\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}.$$

Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Schwere. Während in der Nähe der Erdoberfläche das Gewicht von 1^{cbm} Luft $\gamma = \frac{p}{R\,T}$ ist (S. 221), beträgt es in grosser Höhe (Fig. 238), wenn man seine Entfernung vom Mittelpunkte der Erde z und den Erdhalbmesser r nennt: $\gamma = \frac{p}{R\,T}\,\frac{r^2}{z^2}$ (s. 1. Theil, 2. Aufl., S. 57). Daher wird aus Gl. 1:

Fig. 238.



$$dp = -\frac{p}{R\,T} \cdot \frac{r^2}{z^2} \cdot dz, \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{p} = -\frac{r^2}{R\,T}\,\frac{dz}{z^2},$$

also $$\mathrm{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{r^2}{R\,T}\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right) = \frac{r^2}{R\,T}\,\frac{z_2 - z_1}{z_1\,z_2}.$$

Ist nun $z_1 = r$, $z_2 - z_1 = h$, so folgt

$$\mathrm{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{r^2}{R\,T}\frac{h}{r\,(r+h)} = \frac{h}{1+\frac{h}{r}}\frac{1}{R\,T} \quad \text{und}$$

9)
$$\frac{h}{1+\frac{h}{r}} = R\,T\,\mathrm{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

Der Vergleich mit Gl. 6 zeigt, dass die rechten Seiten übereinstimmen, und dass nur links h durch $\frac{h}{1+\frac{h}{r}}$ ersetzt ist. Wegen $r = 6\,370\,000$ weicht der letztere Werth meist von h nicht wesentlich ab.

Beispiel 1: Es sei wie in dem Beispiel 1, auf S. 215: am unteren Punkte $p_1 = 749{,}2$ mm, am oberen $p_2 = 692{,}7$ mm, ausserdem aber die Temperatur

unten $t_1 = 14{,}4^0$, $T_1 = 287{,}4$,

oben $t_2 = 10{,}6^0$, $T_2 = 283{,}6$; $T_1 - T_2 = 3{,}8$;

dann wird nach Gl. 5

$$h = 29{,}37 \cdot 3{,}8\,\frac{\log 749{,}2 - \log 692{,}7}{\log 287{,}4 - \log 283{,}6} = 657{,}4\ \mathrm{m}$$

(gegen 628 m für $t_1 = t_2 = 0$).

Mit $T = \frac{1}{2}\,(287{,}4 + 283{,}6) = 285{,}5$ liefert Gl. 7

$$h = 67{,}63 \cdot 285{,}5\,(\log 749{,}2 - \log 692{,}7) = 657{,}5\ \mathrm{m},$$

also fast dasselbe wie vorstehend.

Gl. 8 liefert mit $t = \frac{1}{2}\,(14{,}4 + 10{,}6) = 12{,}5^0$

$$h = 16\,000\,(1 + 0{,}05)\,\frac{749{,}2 - 692{,}7}{749{,}2 + 692{,}7} = 658{,}3\ \mathrm{m},$$

d. h. etwa 1 m zu viel, was aber bei der sonstigen Unsicherheit dieses Messverfahrens nicht erheblich ist.

Aus Gl. 9 endlich wird in Verbindung mit dem Ergebnisse nach Gl. 7:

$$\frac{h}{1+\frac{h}{6\,370\,000}} = 657{,}5, \quad \text{oder}$$

$$h\left(1 - \frac{657{,}5}{6\,370\,000}\right) = 657{,}5, \quad \text{d. h.}$$

$$h = 657{,}6\ \mathrm{m}.$$

Ist t ungefähr 10^0 C. und p ungefähr 760 mm, so entspricht einer Abnahme des Barometerstandes um 1 mm Quecksilbersäule, nach Gl. 8, ein Höhenunterschied von rund 11 m.

Beispiel 2: Steighöhe eines Luftballons mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit der Temperatur. Sind γ_1 und γ_1' die Dichten der Aussenluft und der Füllung am Erdboden, wo der Druck und die Temperatur p_1 und T_1 betragen und beziehen sich γ_2, γ_2', p_2 und T_2 auf die Grenze der Steighöhe h, so gilt für letztere (nach S. 218) die Bedingung

$$K = 0 \quad \text{oder} \quad V(\gamma_2 - \gamma_2') = G'.$$

Wir nehmen an, dass im Ballon dieselbe Temperatur und derselbe Druck herrsche wie aussen. Dann ist nach der Zustandsgleichung (S. 220) wegen $\gamma = 1 : v$, wenn R' den Festwerth für die Gasfüllung bedeutet,

$$\gamma_1 = \frac{p_1}{R\,T_1}, \quad \gamma_1' = \frac{p_1}{R'\,T_1},$$

$$\gamma_2 = \frac{p_2}{R\,T_2}, \quad \gamma_2' = \frac{p_2}{R'\,T_2};$$

daher

$$\gamma_2 - \gamma_2' = (\gamma_1 - \gamma_1')\,\frac{p_2}{p_1}\,\frac{T_1}{T_2}, \quad \text{und}$$

$$V(\gamma_2 - \gamma_2') = V(\gamma_1 - \gamma_1')\,\frac{p_2}{p_1}\,\frac{T_1}{T_2} = G';$$

oder

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{G'}\,\frac{T_1}{T_2}.$$

Setzt man diesen Werth in Gl. 4, so entsteht

$$\mathfrak{l}\left(\frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{G'}\,\frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{1}{R\tau}\,\mathfrak{l}\left(\frac{T_1}{T_2}\right).$$

Daraus folgt: $\log \dfrac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{G'} = \log\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)\left(\dfrac{1}{R\tau} - 1\right)$ oder

10) $$\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{1}{\dfrac{1}{R\tau} - 1}\,\log\left(\frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{G'}\right).$$

Hierdurch ist das Verhältnis der Temperaturen unten und an der Grenze der Steighöhe bestimmt. Kennt man nun die Temperaturabnahme τ auf 1^{m} Höhe, so ist

11) $$h = \frac{T_1 - T_2}{\tau}.$$

Für das Beispiel auf S. 218 ist: $V = 700$, $\gamma_1 = 1{,}29$, $\gamma_1' = 0{,}45$, $V(\gamma_1 - \gamma_1') = 588$, $G' = 500$. Nimmt man auf 100^{m} Höhe eine Abnahme der Temperatur um $0{,}5^0$, d. h. $\tau = 0{,}005$ an, so wird für $R = 29{,}37$

$$\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{1}{\dfrac{200}{29{,}37} - 1}\,\log 1{,}176 \quad \text{und} \quad T_2 = 0{,}972\,T_1.$$

Beträgt nun die Temperatur unten $T_1 = 283$, so wird hiernach $T_2 = 275{,}1$, $T_1 - T_2 = 7{,}9^0$, mithin

$$h = 7{,}9 \cdot 200 = 1580^{\mathrm{m}}.$$

Eine etwas unrichtige Schätzung von τ beeinflusst das Ergebnis der Rechnung nur wenig, weil τ sowohl in Gl. 10, als auch in Gl. 11 vorkommt. Mit $\tau = 0{,}006$, wird z. B. $h = 1608^{\text{m}}$, gegen $h = 1580^{\text{m}}$ mit $\tau = 0{,}005$.

Zur Erleichterung der Berechnung dienen Jordan's Barometrische Höhentafeln. (Hannover 1896. Helwing).

4. Gleichgewicht zwischen tropfbaren und gasförmigen Flüssigkeiten.

a) Barometer. Druckmesser.

Die Atmosphäre übt auf die Erdoberfläche in der Höhe des Meeresspiegels einen Druck $p_0 = 10333^{\text{kg}}/_{\text{qm}}$ aus (s. S. 213), also auch auf die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit. Dieser Druck p_0 kann durch das Gewicht einer Flüssigkeitssäule von der Höhe $h_0 = p_0 : \gamma$ ersetzt werden, worin γ die Dichte der Flüssigkeit ist. Für Wasser ist $\gamma = 1000$, daher

$$h_0 = \frac{10333}{1000} = 10{,}333^{\text{m}},$$

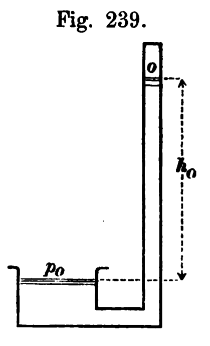


Fig. 239.

d. h. eine Wassersäule von $10{,}333^{\text{m}}$ Höhe drückt durch ihr Gewicht ebenso stark wie die Atmosphäre.

Wird in dem Gefässe (Fig. 239) aus dem rechtseitigen, oben geschlossenen Rohre die darin befindliche Luft entfernt, so wird in dem luftleeren Rohre der Wasserspiegel um $h_0 = 10{,}333^{\text{m}}$ ansteigen und Gleichgewicht in der Flüssigkeit herrschen, weil auf der linken freien Wasserfläche des Gefässes der Atmosphärendruck p_0 lastet, welcher der Flüssigkeitssäule h_0 das Gleichgewicht hält.

Besteht die Flüssigkeit aus Quecksilber mit $\gamma = 13600$; so wird

$$h_0 = \frac{10333}{13600} = 0{,}76^{\text{m}} \text{ bei } 0^0 \text{ C.}$$

Dem mittleren Atmosphärendruck am Meeresspiegel entspricht also eine Quecksilbersäule von 760^{mm} Höhe.

Jede Änderung des Luftdruckes giebt sich durch Änderung von h_0 zu erkennen. Darauf beruht das **Barometer** (von βαρύς, schwer).

Der im Maschinenwesen eingeführten Atmosphäre von $10000^{\text{kg}}/_{\text{qm}}$ (s. S. 215) entsprechen $10000 : 13600 = 0{,}735^{\text{m}} = 735^{\text{mm}}$ Quecksilbersäule.

Für die Wettersäule zu Hannover, welche 57 m über dem Meere liegt, berechnet sich bei überall gleicher Temperatur von 10° C. der Druck p_2 nach Gl. 7, S. 223, indem man darin $h = 57$, $T = 283$, $p_1 = 760$ setzt; es wird

$$\log p_2 = \log 760 - \frac{57}{67{,}63 \cdot 283}$$

und $p_2 = 754{,}8$ mm Quecksilbersäule.

Druckmesser. (Manometer, von μανός, dünn). Wie man den Atmosphärendruck durch eine Flüssigkeitssäule misst, so kann man auch die Pressungen anderer (tropfbarer oder gasförmiger) Flüssigkeiten durch damit im Gleichgewichte befindliche Flüssigkeitssäulen messen und mit dem Atmosphärendrucke vergleichen.

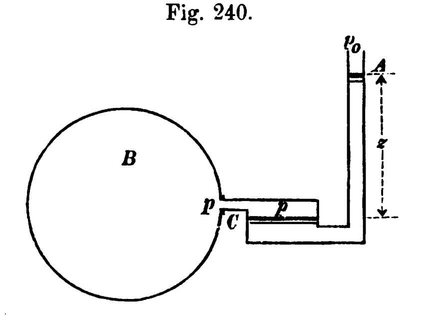
Soll der Druck p des in dem Behälter B (Fig. 240) befindlichen Dampfes oder Gases gemessen werden, so verbindet man mit dem Behälter einen oben bei A offenen Druckmesser. Dann wirkt bei A der Atmosphärendruck p_0 und bei C, in einer Tiefe z unter dem Flüssigkeitsspiegel bei A, der Druck $p = p_0 + \gamma z$, wenn γ die Dichte der Messflüssigkeit ist. Es folgt

1) $$p - p_0 = \gamma z$$

und mit $p_0 = \gamma h_0$

2) $$\frac{p - p_0}{p_0} = \frac{z}{h_0}.$$

Fig. 240.



$p - p_0$ ist der Überdruck im Behälter B gegen die Atmosphäre und $(p - p_0) : p_0$ der in Atmosphären ausgedrückte Überdruck.

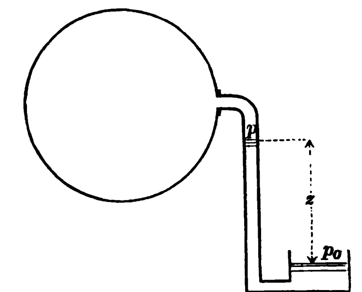
Jeder Atmosphäre Überdruck (10000 kg/qm) entspricht eine Quecksilbersäule von 735 mm; zum Messen von 10 Atmosphären ist daher eine Säule von 7,35 m erforderlich. Derartige Druckmesser eignen sich deshalb nur für feststehende, nicht für bewegliche Dampfkessel. Bei letzteren benutzt man Federmanometer, die den Druck aus der elastischen Formänderung einer Gefässwand erkennen lassen. Die Theilung solcher Federmanometer lässt sich aber nicht berechnen, sondern muss vielmehr durch Vergleichung mit einem offenen Quecksilber-Druckmesser gefunden werden. Das Quecksilber befindet sich in einer Eisenröhre; ein auf ihm schwimmendes Eisenstück ist durch eine über eine Rolle laufende Schnur mit einem in

bequemer Höhe befindlichen Zeiger verbunden, so dass man Hebung und Senkung des Quecksilberspiegels aus der Bewegung des Zeigers zu erkennen vermag.

Für geringen Überdruck, wie er z. B. in den Röhren für Leuchtgas herrscht, benutzt man Wasser als Messflüssigkeit und drückt auch den Überdruck nicht in ^{at}, sondern in ^{mm} Wassersäule aus; 1^{mm} Wassersäule entspricht $\frac{1}{10000}$ Atmosphäre, da 1^{at} mit 10^{m} Wassersäule gleichbedeutend ist; 25^{mm} Wassersäule entspricht daher $\frac{1}{400}{}^{at}$.

Zum Messen von Drücken in Kondensatoren, Feuerzügen, Schornsteinen u. dgl., welche kleiner sind als der Atmosphärendruck, dienen Minderdruck-Messer (Vakuummeter) (Fig. 241). Es ist

Fig. 241.



$$p + \gamma z = p_0, \quad \text{oder}$$

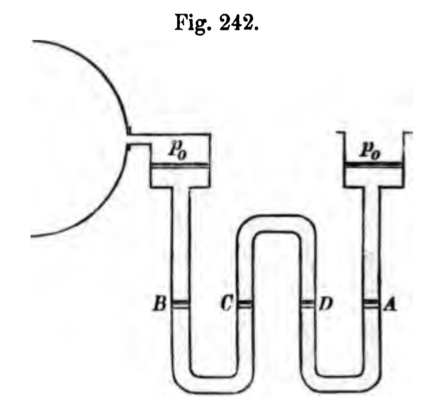
$$p_0 - p = \gamma z \quad \text{und mit } p_0 = \gamma h_0$$

3) $$\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{z}{h_0};$$

letzteres ist der Minderdruck in Atmosphären.

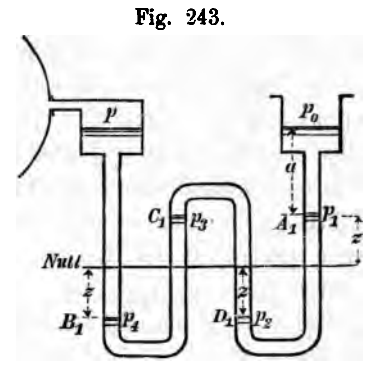
Zusammengesetzter Druckmesser geringerer Höhe. Die mehrfach auf und nieder gebogenen Röhren (Fig. 242) sind im unteren Theile (unter AB) mit Quecksilber, im oberen Theile mit einer leichteren Flüssigkeit, etwa Wasser oder Glycerin, gefüllt. Bei gleichen Drücken p_0 in beiden oberen Gefässen steht das Quecksilber in allen Röhren bis zu der Wagerechten AB. Wächst der Druck aber auf der linken Seite von p_0 auf p (Fig. 243), während rechts der Atmosphärendruck p_0 wirksam bleibt, so senkt sich bei B das Queck-

Fig. 242.



silber um z, steigt daher bei C und sinkt bei D um das gleiche Mafs z, muss also schliesslich bei A um z steigen, wenn die Röhren überall gleiche Weite haben, weil die Flüssigkeiten nicht zusammendrückbar sind.

Fig. 243.



Die oberen Gefässe werden hierbei als so weit vorausgesetzt, dass ihre Flüssigkeitsspiegel nicht wesentlich schwanken. Die Dichte der schwereren Flüssigkeit sei γ_1, die der leichteren γ.

Es ist dann bei A_1 der Druck $p_1 = p_0 + \gamma a$, bei D_1 der Druck $p_2 = p_1 + 2\gamma_1 z = p_0 + \gamma a + 2\gamma_1 z$, bei C_1 der Druck $p_3 = p_2 - 2\gamma z = p_0 + \gamma(a - 2z) + 2\gamma_1 z$, bei B_1 der Druck $p_4 = p_3 + 2\gamma_1 z = p_0 + \gamma(a - 2z) + 4\gamma_1 z$ und schliesslich der im oberen, linkseitigen Gefässe vorhandene Druck $p = p_4 - \gamma(a + 2z) = p_0 + 4(\gamma_1 - \gamma) z$. Aus letzterem folgt der Überdruck in ^{at}:

$$\frac{p - p_0}{p_0} = \frac{4(\gamma_1 - \gamma) z}{\gamma_1 h_0} = 4\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_1}\right)\frac{z}{h_0},$$

wenn h_0 diejenige Höhe der Flüssigkeit mit der grösseren Dichte γ_1 ist, welche dem Atmosphärendruck p_0 entspricht. Man erkennt leicht, dass, wenn statt 4 Röhren, $2n$ Röhren in entsprechender Weise hinter einander geschaltet sind,

4) $$\frac{p - p_0}{p_0} = 2n\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_1}\right)\frac{z}{h_0} \text{ wird.}$$

Für $\gamma_1 = 13600$ (Quecksilber), $\gamma = 1000$ (Wasser), $h_0 = 735^{\text{mm}}$ (1^{at}) ergiebt sich

$$\frac{p - p_0}{p_0} = 2n\left(1 - \frac{1}{13{,}6}\right)\frac{z}{735} = 2n\frac{z}{793},$$

und mit $2n = 8$,

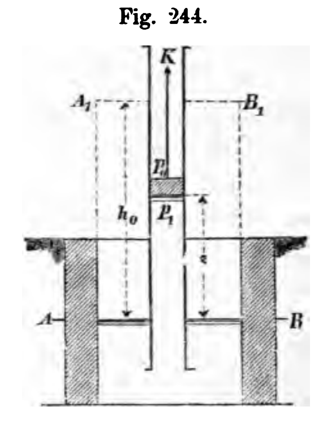
$$z = \frac{p - p_0}{p_0} \cdot 99^{\text{mm}};$$

hier erfordert also 1^{at} nur 99^{mm} Theilungshöhe der Quecksilbersäule, gegen 735^{mm} beim einfachen Druckmesser.

b) Saugpumpe. Kreiselpumpe. Heber.

AB (Fig. 244) sei der Wasserspiegel eines Brunnens. In einem cylindrischen Rohre, dessen unteres Ende ins Wasser taucht, befindet sich ein beweglicher dicht schliessender Kolben. Der Druck des Wassers im Brunnen und in dem unterhalb des Kolbens befindlichen Theile des Rohres ist am einfachsten zu berechnen, wenn man sich in der Höhe h_0 über dem wahren Wasserspiegel einen Wasserspiegel $A_1 B_1$ denkt, auf den kein Atmosphärendruck wirkt. Ist durch das Spiel der (in der Figur nicht gezeichneten) Ventile — nach einer gewissen Zahl von Kolbenhüben — die Luft aus dem Rohrtheile unterhalb des Kolbens entfernt, so herrscht hier, in der Höhe z über AB, also in der Tiefe $h_0 - z$ unter $A_1 B_1$ ein Druck

Fig. 244.



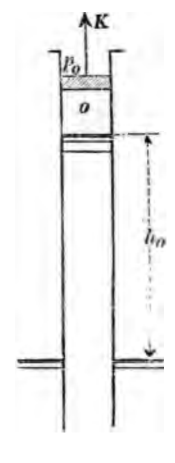
1) $$p_1 = \gamma (h_0 - z).$$

Befindet sich oberhalb des Kolbens noch kein Wasser, so wirkt dort der Atmosphärendruck p_0. Ist F der Querschnitt der Röhre, so ist an dem Kolben eine aufwärts gerichtete Kraft

2) $$K = (p_0 - p_1) F = \gamma F z$$

für den Ruhezustand, sowie für langsame gleichmässige Aufwärts-Bewegung erforderlich, gerade so, als ob die Wassersäule von der Höhe z nicht unterhalb des Kolbens von dem Atmosphärendrucke in der Schwebe erhalten würde, sondern auf dem Kolben lastete.

Fig. 245.

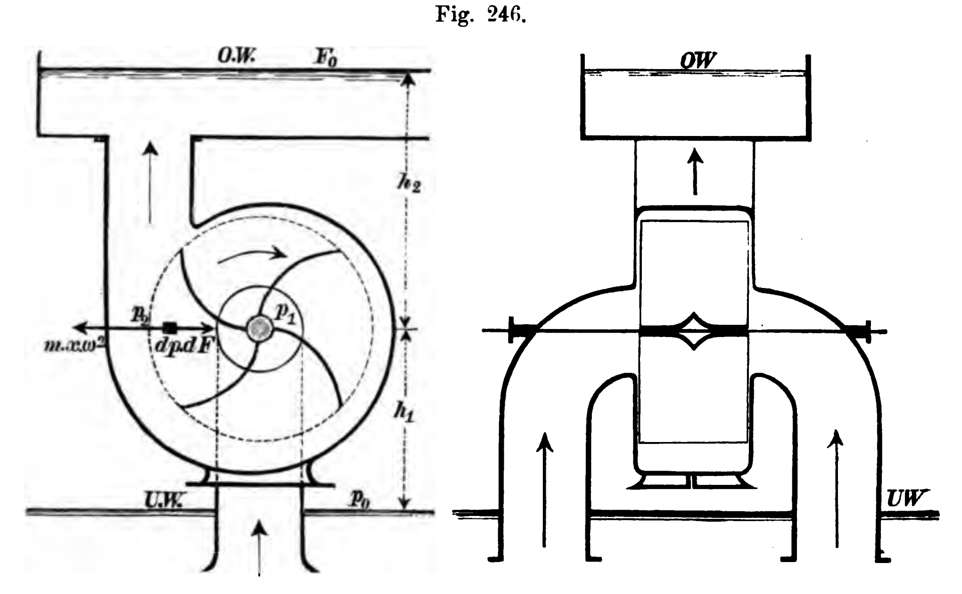


Die Gl. 2 für K gilt aber nur so lange, wie Gl. 1 für p_1 einen positiven Werth ergiebt, d. h. für $z \leq h_0$, oder so lange sich die untere Kolbenfläche höchstens um h_0 über dem Wasserspiegel AB befindet. Für $z > h_0$ würde nach Gl. 1 der Druck p_1 negativ. Negative Flüssigkeitsdrücke giebt es aber nicht, da Flüssigkeiten keine nennenswerthe Zugfestigkeit haben. Mithin hört bei wachsendem z die Gültigkeit der Gl. 1 mit $z = h_0$

auf. Für $z > h_0$ bleibt der Druck unter dem Kolben Null, das Wasser drückt nicht mehr gegen den Kolben, folgt ihm nicht mehr bei seiner Aufwärts-Bewegung, sondern verbleibt in der Höhe h_0 über dem Wasserspiegel des Brunnens stehen (Fig. 245), und unter dem Kolben entsteht (abgesehen von der Verdampfung des Wassers) ein druckloser Raum, so dass nunmehr unveränderlich $K = \gamma F h_0$ bleibt. Das Aufsaugen einer Flüssigkeit ist daher nur bis zu der, dem Atmosphärendrucke entsprechenden Flüssigkeitshöhe h_0 (bei Wasser bis etwa 10^m) möglich.

Kreiselpumpe (Centrifugalpumpe). Auf S. 210 wurde gezeigt, dass Wasser durch schnelle Drehung um eine lothrechte Achse auf eine Höhe z (Fig. 230) gehoben werden konnte und dass die erforderliche Umfangsgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gz}$ sein müsse. Bei den zum Wasserfördern bestimmten Kreiselpumpen (Fig. 246) er-

Fig. 246.



folgt die Drehung meist um eine wagerechte Achse, die oberhalb des Unterwassers *U.W.* liegt, so dass das Wasser auf eine gewisse Höhe angesogen und dann weiter emporgedrückt wird. Es lässt sich zeigen, dass die Beziehung $v = \sqrt{2gz}$ auch bei dieser Anordnung gültig bleibt.

Die wagerechte Drehachse liege um h_1 über dem Unterwasser, um h_2 unter dem Oberwasser.

Betrachtet man ein Theilchen m der in gleichmässiger Drehung begriffenen Wassermasse, welches auf dem wagerechten Halbmesser im Abstand x von der Drehachse liegt, nennt dx seine Länge in der Richtung x, dF den Querschnitt in lothrechter Ebene, so ist die Ergänzungskraft $m \cdot x \cdot \omega^2 = \frac{\gamma}{g} dF \cdot dx \cdot x \cdot \omega^2$. Ist p der Druck im Abstande x von der Achse, so wächst dieser nach aussen auf die Länge dx um dp. Daher muss sein:

$$dp \cdot dF = \frac{\gamma}{g} \cdot dF \cdot dx \cdot x \cdot \omega^2 \quad \text{oder}$$

$$dp = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot x \cdot dx.$$

Sind die Drücke für $x = r$ und $x = 0$ bezw. p_2 und p_1, so wird

$$p_2 - p_1 = \frac{\gamma}{2g} r^2 \omega^2.$$

Nun ist

$$p_1 = p_0 - \gamma h_1; \quad p_2 = p_0 + \gamma h_2,$$

daher (mit $r\omega = v$)

1) $$h_1 + h_2 = \frac{v^2}{2g},$$

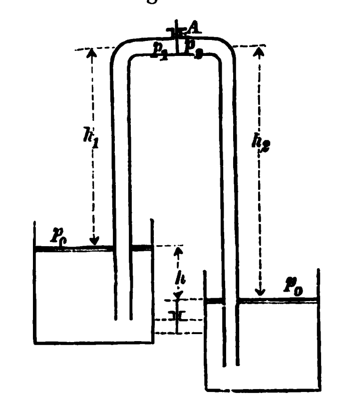
oder wenn man den Höhenunterschied zwischen Unter- und Oberwasser $h_1 + h_2 = h$ setzt,

2) $$v = \sqrt{2gh},$$

wie S. 210 gefunden. Mit dieser Geschwindigkeit v kann man das Wasser in den Röhren im Ruhezustande erhalten, so dass es nicht herabsinkt. Zur Wasserförderung muss v grösser werden.

Die Saughöhe h_1 muss hierbei kleiner sein, als h_0 (vgl. S. 231).

Fig. 247.



Heber. Das Heberohr (Fig. 247) tauche mit seinen unteren Enden in 2 Gefässe, deren Wasserspiegel um $h = h_2 - h_1$ verschieden hoch liegen, wobei zunächst $h_1 < h_2 < h_0$ sein soll. Das Heberohr sei vollständig mit Flüssigkeit gefüllt und bei A durch einen Schieber dicht geschlossen; dann

wird die Flüssigkeit des Hebers in Ruhe sein. An der linken Seite des Schiebers herrscht ein Druck

$$p_1 = p_0 - \gamma h_1 = \gamma (h_0 - h_1),$$

an der rechten Seite desselben ein Druck

$$p_2 = p_0 - \gamma h_2 = \gamma (h_0 - h_2);$$

der Schieber erfährt daher einen Überdruck

1) $$p_1 - p_2 = \gamma (h_2 - h_1) = \gamma h$$

von links nach rechts, gerade so, wie es in dem punktirt angedeuteten, die Gefässe unmittelbar verbindenden Rohre der Fall sein würde. Wird der Schieber im Heberrohr entfernt, so muss also Wasser von links nach rechts hinüberfliessen.

Senkt man bei geschlossenem Schieber A das rechte Gefäss, so dass $h_2 = h_0$ wird, während $h_1 < h_0$ bleibt, so wird $p_2 = 0$ und der Schieber erleidet von links den Überdruck

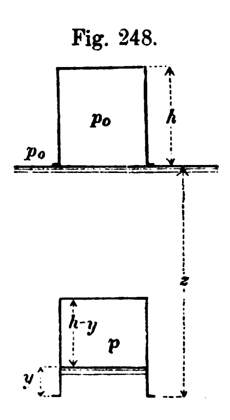
2) $$p_1 = p_0 - \gamma \cdot h_1 = \gamma (h_0 - h_1),$$

der grösser ist, als nach Gl. 1 und auch unverändert bleibt, wenn $h_2 > h_0$ wird, weil dann rechts vom Schieber ein luftleerer Raum entsteht. Demnach muss in solchen Fällen Wasser durch den Heber fliessen, sobald der Schieber geöffnet wird. — Senkt man nun aber das linke Gefäss, so dass $h_1 = h_0$ wird, während $h_1 < h_2$ bleibt, so wird auch der Überdruck $p_1 = 0$ und die Heberwirkung hört auf. Die Saughöhe h_1 eines Hebers muss daher ebenfalls stets kleiner sein, als die dem Atmosphärendruck entsprechende Flüssigkeitshöhe h_0 (s. S. 231).

c) Taucherglocke.

Ein oben geschlossenes, unten offenes Gefäss (Fig. 248), welches mit Luft gefüllt ist, werde um die Tiefe z im Wasser niedergesenkt; dann wird Wasser von unten auf eine Höhe y in dem Gefässe (der Glocke), emporsteigen und man wird aus der Höhe y auf die Tiefe z schliessen können.

Fig. 248.



Die Luft wird durch das eintretende Wasser von p_0 auf p zusammengedrückt, und wenn man annimmt, dass die Temperatur der Luft sich nicht ändert, so gilt nach dem Boyle-schen Satze (S. 212)

1) $$p : p_0 = h : (h - y).$$

Ausserdem ist aber (wegen der Tiefe z unter Wasser)

2) $$p = p_0 + \gamma (z - y).$$

Hieraus folgt, mit $p_0 = \gamma h_0$:

3) $$z = h_0 \left(\frac{h}{h - y} - 1 \right) + y = y \left(\frac{h_0}{h - y} + 1 \right).$$

Beispiel: Soll das Wasser höchstens bis zur Mitte der Glocke steigen, ist also $y = \frac{1}{2} h$, so darf die Senkungstiefe nach Gl. 3 nur

$$z = h_0 + \frac{1}{2} h$$

sein; zugleich wird der Druck in der Glocke $p = 2 p_0$.

Soll der Glockenraum aber in beliebiger Tiefe z wasserfrei bleiben, so muss $y = 0$ und der Luftdruck in der Glocke nach Gl. 2 stets: $p = p_0 + \gamma z = \gamma (h_0 + z)$ sein, was durch Zuführung künstlich verdichteter Luft zu ermöglichen ist. (Taucherapparate, Druckluftgründung).

5. Gleichförmige Drehung gasförmiger Körper um eine Achse.

Flügelgebläse.

Ein Flügelgebläse (Fig. 249) hat in seinem Wesen grosse Ähnlichkeit mit der Kreiselpumpe (S. 231). An der Drehachse herrsche durch freie Verbindung mit der Aussenluft der Druck p_1, am äusseren Umfange betrage der Druck p_2. Für ein Massentheilchen m im Abstande x von der Achse gilt wieder wie auf S. 232

$$dp = \frac{\gamma}{g} \omega^2 x \, dx.$$

Fig. 249.

Für die weitere Behandlung ist jetzt nur die Veränderlichkeit von γ zu berücksichtigen. Nach dem Boyle'schen Satze ist $p = p_0 \frac{\gamma}{\gamma_0}$, daher

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma_0}{p_0} \frac{\omega^2}{g} x \, dx.$$

Integrirt man zwischen den Grenzen p_2 (für $x = r$) und p_1 (für $x = 0$), so wird (mit $\omega r = v$)

1) $$\left(\frac{p_2}{p_1} \right) = \frac{\gamma_0}{p_0} \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{\gamma_0}{p_0} \frac{v^2}{2g}.$$

Für 0° C. und $p_0 : \gamma_0 = 8000^{\mathrm{m}}$ (S. 214/15), erhält man

$$2) \qquad \mathfrak{l}\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{1}{8000}\frac{v^2}{2g}.$$

Beispiel: Macht das Flügelrad von $r = 0{,}5^{\mathrm{m}}$ in der Minute 800 Umdrehungen, so ist $v = \frac{800 \cdot 0{,}5 \cdot 2\pi}{60} = 41{,}89 \ ^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s.}}$; dem entspricht eine Geschwindigkeitshöhe von 90 m; sonach wird

$$\mathfrak{l}\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{90}{8000} = 0{,}01125, \quad \frac{p_2}{p_1} = 1{,}0113 \quad \text{und}$$

$$p_2 = (1 + 0{,}0113)\, p_1 .$$

Der Druck in dem Flügelrade ändert sich also nur um 0,0113 oder etwa $^1/_{89}$, daher kann auch die Dichte annähernd als gleichbleibend betrachtet werden. so dass man für die meisten Fälle mit genügender Annäherung (in Übereinstimmung mit S. 232) schreiben kann

$$p_2 - p_1 = \gamma_1 \frac{v^2}{2g}, \quad \text{oder mit} \quad \frac{p_1}{\gamma_1} = 8000$$

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{1}{8000}\frac{v^2}{2g}, \quad \text{also mit} \quad \frac{v^2}{2g} = 90^{\mathrm{m}}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{1}{8000}\frac{v^2}{2g} = 1{,}01125 \quad \text{und}$$

$$p_2 = (1 + 0{,}01125)\, p_1 .$$

Es folgt dies auch aus Gl. 1, wenn man mit Rücksicht darauf, dass $\frac{p_2}{p_1}$ nur wenig von der Einheit abweicht, $\mathfrak{l}\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \mathfrak{l}\,(1 + x)$ annähernd $= x = \frac{p_2 - p_1}{p_1}$ setzt (vgl. S. 216).

Der Unterschied beider Werthe für p_2 ist also sehr gering.

Mit dem angegebenen Flügelgebläse erreicht man nur einen Überdruck von rund $^1/_{89}$ Atmosphäre, gemessen durch $\frac{10\,000}{89} = 113^{\mathrm{mm}}$ Wassersäule. Dieser Druck genügt für Schmiedefeuer.

6. Allgemeine Gleichgewichts-Bedingung für Flüssigkeiten von L. Euler.

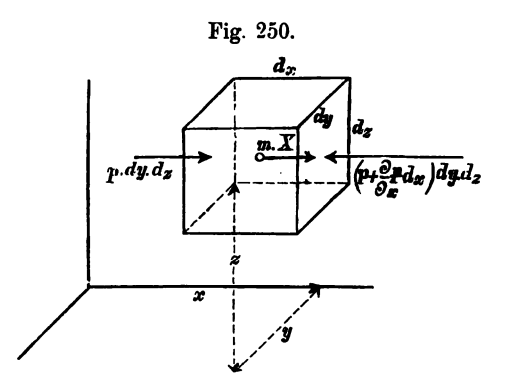
Auf ein Massentheilchen $m = \frac{\gamma}{g} dx \cdot dy \cdot dz$ (Fig. 250) wirke eine Massenkraft, welche in der Form $R \cdot m$ geschrieben und dadurch schon als eine Massenkraft gekennzeichnet wird; R ist die Beschleunigung, welche das Theilchen durch die Kraft erfahren würde.

Der Druck betrage an der Stelle x, y, z, wo das Theilchen sich befindet, p; dann ist

1) $$p = f(x, y, z)$$

eine Funktion von x, y und z, da der Druck in der Flüssigkeit im Allgemeinen von Punkt zu Punkt wechseln wird.

Fig. 250.



Die Beschleunigung R der Massenkraft werde nach den Achsenrichtungen in X, Y, Z zerlegt; dann wirkt auf das Theilchen in der x-Richtung die Massenkraft $X \cdot m$. An der linken Seitenfläche von der Grösse $dy \cdot dz$ wirkt die Oberflächenkraft $p \cdot dy \cdot dz$. Beim Übergange von der linken nach der rechten Seitenfläche ändert sich x um dx, während y und z dieselben bleiben; somit wächst auch der Druck um das partielle Differential $\frac{\partial p}{\partial x} dx$. Das Gleichgewicht des Theilchens verlangt daher in der x-Richtung:

$$X \cdot m = \frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz \quad \text{oder}$$

$$X \frac{\gamma}{g} dx \cdot dy \cdot dz = \frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz, \quad \text{mithin}$$

$$\frac{\gamma}{g} X dx = \frac{\partial p}{\partial x} dx.$$

In gleicher Weise gilt für die anderen Achsenrichtungen

$$\frac{\gamma}{g} Y dy = \frac{\partial p}{\partial y} dy,$$

$$\frac{\gamma}{g} Z dz = \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$

Durch Zusammenzählen der 3 Gleichungen entsteht auf der rechten Seite das vollständige Differential dp des Druckes, nämlich

2) $$\frac{\gamma}{g}(X dx + Y dy + Z dz) = dp.$$

Sind X, Y, Z als Funktionen von x, y, z gegeben, so führt die Integration der Gl. 2 zu dem Gleichgewichtsdrucke p (Gl. 1). Vertauscht man aber in Gl. 2 die rechte Seite dp mit Null, so drückt (da γ nicht Null sein kann)

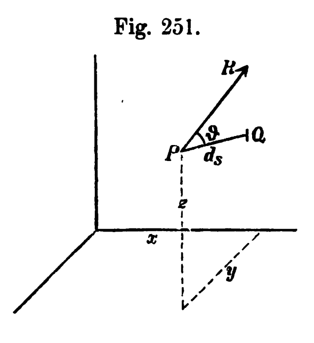
$$3) \qquad (Xdx + Ydy + Zdz) = 0$$

die Bedingung aus, für solche Zusammenstellungen der Koordinaten x, y, z, welche einem gleichbleibenden Drucke p entsprechen. Die hierdurch bezeichneten Punkte in der Flüssigkeit bilden eine Fläche überall gleichen Druckes, oder eine **Niveaufläche**, deren Gleichung durch Integration von Gl. 3 erhalten und

$$4) \qquad f(x, y, z) = \text{Const.}$$

geschrieben werden kann. Die Funktion hat dieselbe Form wie in Gl. 1. Jedem anderen Werthe der Const. entspricht eine andere Niveaufläche mit einem anderen Drucke.

Fig. 251.



Die Niveauflächen stehen in einer einfachen Beziehung zur Richtung der Massenkraft $R \cdot m$. An einem Punkte P innerhalb einer im Gleichgewichte befindlichen Flüssigkeit (Fig. 251) bilde R mit den Achsen die Richtungswinkel α, β, δ. PQ sei ein beliebiges Kurventheilchen ds, welches in einer durch P gelegten Niveaufläche liegen soll; ds habe die Richtungswinkel α_1, β_1, δ_1. Dann gilt für den Winkel ϑ zwischen R und ds die Gleichung

$$\cos\vartheta = \cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1 + \cos\delta \cdot \cos\delta_1 .$$

Nun sind X, Y, Z die Projektionen von R; dx, dy, dz diejenigen von ds auf die drei Achsen, mithin ist

$$R\cos\alpha = X; \quad R\cos\beta = Y; \quad R\cos\delta = Z;$$

$$ds\cos\alpha_1 = dx; \quad ds\cos\beta_1 = dy; \quad ds\cos\delta_1 = dz.$$

Daher wird

$$R\,ds\cos\vartheta = Xdx + Ydy + Zdz$$

Weil nun für Kurventheilchen innerhalb einer Niveaufläche die Gl. 3 gilt, so muss

5) $$R\,ds\cos\vartheta = 0, \quad \text{d. h.} \quad \vartheta = 90^0$$

sein. Oder:

Eine Niveaufläche steht in jedem ihrer Punkte rechtwinklig zu der für den betreffenden Punkt gültigen Massenkraft $R \cdot m$.

Diese allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen sind von Leonhard Euler (geb. zu Basel 1707, gest. zu Petersburg 1783) im Jahre 1755 entwickelt worden.

Aus vorstehendem Satze folgt unmittelbar, dass, wenn die Schwere die einzige Massenkraft ist, die Niveauflächen wagerechte Ebenen sind (S. 176/77).

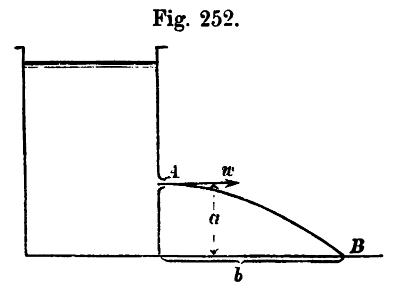
Da die freie Oberfläche einer Flüssigkeit ebenfalls eine Niveaufläche ist, so finden auch die Entwickelungen über die Gestalt der freien Oberfläche (S. 204 und 206) hier noch eine festere Begründung.

B. Bewegung flüssiger Körper.

I. Ausfluss des Wassers aus Gefässen.

Wird in der Seitenwand eines mit Wasser gefüllten Gefässes (Fig. 252) bei A eine kleine Öffnung frei gemacht, so entsteht ein ausfliessender Wasserstrahl. Die einzelnen Wassertheilchen führen eine parabolische Wurfbewegung aus (1. Theil, 2. Aufl., S. 50). Ist w die wagerechte Geschwindigkeit, mit der ein Wassertheilchen bei A das Gefäss verlässt, a die Höhe von A über dem Boden, t die Zeit der Bewegung von A bis B, so wird

Fig. 252.



unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes $a = {}^1/_2 g t^2$; $b = w t$, mithin

$$1) \qquad \frac{b}{w} = \sqrt{\frac{2a}{g}},$$

so dass bei bekanntem a aus der Sprungweite b des Strahles die Ausflussgeschwindigkeit w berechnet werden kann.

War die Öffnung geschlossen, demnach alles im Gefässe befindliche Wasser in Ruhe, und macht man die Öffnung plötzlich frei, so wird die ganze im Gefässe befindliche Wassermasse in Beschleunigung gerathen; die Geschwindigkeit, mit der die einzelnen, auf einander folgenden Wassertropfen aus der Öffnung treten, ist nicht die gleiche, sondern eine allmählich wachsende; daher wächst auch die Sprungweite b. Jedoch lehrt die Erfahrung, dass die Veränderung von b und w sehr schnell erfolgt, dass sich schon nach sehr kurzer Zeit (meist schon nach 1 Sekunde) eine bestimmte Sprungweite b und somit eine bestimmte Geschwindigkeit w gebildet hat, die nun unverändert dieselbe bleibt, wenn der Wasserspiegel im Gefässe durch Zufluss stets auf gleicher Höhe erhalten wird. Gleichzeitig hiermit werden sich nun an allen Stellen des Gefässes dauernde Bewegungs- und Druckverhältnisse gebildet haben.

Diesen Zustand nennt man **Beharrungszustand.** In allen nachfolgenden Untersuchungen nehmen wir an, dass der Beharrungszustand eingetreten sei und lassen die höchst verwickelten Verhältnisse vor dem Eintritte desselben, die meist noch nicht einmal 1 Sekunde währen, ausser Acht.

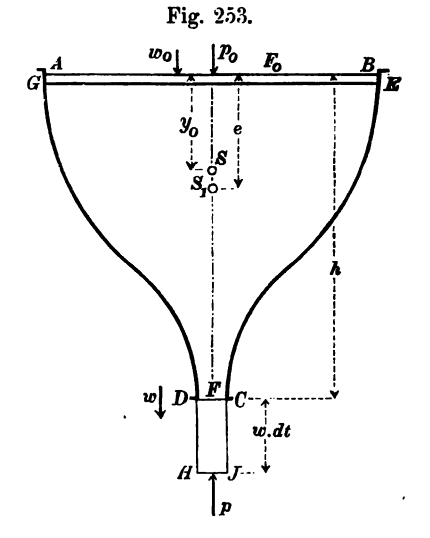
Zunächst wird das Wasser als eine vollkommen reibungslose Flüssigkeit angesehen, auch wird angenommen, dass das Gefäss an allen Stellen zwischen Wasserspiegel und Öffnung von Wasser erfüllt sei, also keine leeren Räume enthalte. (Unter welchen Bedingungen letztere bei der Bewegung des Wassers vorkommen, wird später erörtert). Auch sollen plötzliche Querschnittsänderungen im Gefäss vorläufig noch nicht angenommen werden.

a) Ideelle Ausflussgeschwindigkeit und Ausflussmenge durch eine Bodenöffnung.

Das Wasser ergiesse sich (Fig. 253) durch eine in wagerechter Ebene liegende Öffnung $DC = F$. Das Gefäss habe von der Mitte

des Wasserspiegels bis zur Mitte der Ausflussöffnung eine Mittellinie und verenge sich nach der Öffnung hin allmählich. Dann wird man annehmen können, dass die durch die Öffnung F austretenden Wassertheilchen mit gleichen Geschwindigkeiten durch den Öffnungs-Querschnitt hindurchgehen. Es tritt während eines Zeittheilchens dt ein prismatischer Wasserkörper $F \cdot w \cdot dt$ unten aus. Dessen Masse sei das Massentheilchen

Fig. 253.



$$1)\quad \begin{aligned} m &= \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot w \cdot dt \\ &= \frac{\gamma}{g} \cdot F_0 \cdot w_0 \cdot dt. \end{aligned}$$

Letzteres folgt daraus, weil das gleiche Massentheilchen m oben verschwinden muss; denn ist F_0 der Querschnitt des Wasserspiegels, w_0 die Geschwindigkeit, mit der er sinkt, so muss offenbar $F_0 \cdot w_0 \cdot dt = F \cdot w \cdot dt$ sein.

Wir wollen nun den Satz der Arbeit (1. Theil, 2. Aufl., S. 144) auf die im Gefässe befindliche Wassermasse, u. zw. für ein Zeittheilchen dt anwenden. Hinsichtlich des Zuflusses im Wasserspiegel werde angenommen, dass der Spiegel zuerst während der Zeit dt um $w_0 \cdot dt$, d. h. von AB nach GE sinkt und dass dann plötzlich eine Wasserschicht $ABEG$ zum Ersatze wieder aufgebracht werde. Der Wasserkörper $GEDC$, der zu Anfang und zu Ende des Zeittheilchens vorhanden war, habe die Masse M und wegen des Beharrungszustandes ein unveränderliches Arbeitsvermögen E.

Die gesammte Wassermasse im Gefäss ist dann $M + m$, wovon m sich zu Anfang oben vorfindet, nach der Zeit dt aber unten. Dieselbe Stelle des Gefässes wird nach einander von verschiedenen Massentheilchen eingenommen, die an dieser Stelle stets die gleiche Geschwindigkeit haben und nur durch andere vertauscht sind.

Zu Ende des Zeittheilchens dt ist das gesammte Arbeitsvermögen der Wassermasse $M + m$ offenbar: $E + \frac{1}{2} m w^2$, zu

Anfang aber, wo die Masse m mit der Geschwindigkeit w_0 sich oben befand: $E + \frac{1}{2} m w_0^2$. Daher entsteht in dem Zeittheilchen dt eine Zunahme an Arbeitsvermögen

2) $$\tfrac{1}{2} m (w^2 - w_0^2).$$

Diese muss der Arbeit aller wirkenden Kräfte gleich sein.

Der Schwerpunkt S_1 von M liege um e unter AB. Dann gilt für die Tiefe y_0 des Schwerpunktes S von $M + m$ zu Anfang des Zeittheilchens dt:

$$(M + m) y_0 = M e + m \cdot \tfrac{1}{2} w_0 dt,$$

da der Körper $GEAB$ die Höhe $w_0 dt$ hat. Nach der Zeit dt liege der Schwerpunkt um $y_0 + dy_0$ unter AB, dann ist aus denselben Gründen

$$(M + m)(y_0 + dy_0) = M e + m (h + \tfrac{1}{2} w dt),$$

wenn h die Höhe des Wasserspiegels über der Öffnung ist. Daher wird

$$(M + m) dy_0 = m (h + \tfrac{1}{2} w dt - \tfrac{1}{2} w_0 dt)$$

und, wenn man rechts die unendlich kleinen Grössen gegen h vernachlässigt, $(M + m) dy_0 = m h$. Das Gewicht von $M + m$ verrichtet also in der Zeit dt die Arbeit (1. Theil, 2. Aufl., S.140)

3) $$(M + m) g dy_0 = m g h.$$

Steht nun der Wasserspiegel unter einem Drucke p_0, die Öffnung unter dem Drucke p, so verrichten die Kräfte $p_0 F_0$ und pF während der Zeit dt die Arbeit

4) $$p_0 F_0 w_0 dt - p F w dt = m g \frac{p_0 - p}{\gamma}$$

wegen der Beziehungen in Gl. 1.

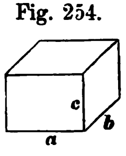
Die Schwerkraft und die Drücke p_0 und p leisten daher während der Zeit dt zusammen die Arbeit

5) $$m g \left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right).$$

Die Druckkräfte des Gefässes gegen die Wassermasse verrichten keine Arbeit, da sie überall rechtwinklig zur Bewegungsrichtung stehen. Die inneren Kräfte im Wasser leisten aber

ebenfalls keine Arbeit, denn sie sind reine Normalkräfte, die einem Gleiten keinen Widerstand entgegensetzen und nur bei einer Änderung des Rauminhaltes Arbeit verrichten könnten. Trennt man nämlich an einer Stelle, wo der Druck p' herrscht, ein kleines Parallelepiped $a \cdot b \cdot c$ heraus (Fig. 254), so verrichten die Druckkräfte, wenn die Seiten sich um da, db, dc vergrössern, die Arbeit

Fig. 254.



$$-p'(b \cdot c \cdot da + a \cdot c \cdot db + a \cdot b \cdot dc).$$

Da aber $V = a \cdot b \cdot c$ und $dV = b \cdot c \cdot da + a \cdot c \cdot db + a \cdot b \cdot dc$ ist, wird die Arbeit der Druckkräfte

$$-p' dV = 0,$$

weil bei Wasser $dV = 0$ ist.

Durch Gleichstellung der Werthe Gl. 2 und Gl. 3 ergiebt sich

I) $$m\left(\frac{w^2}{2} - \frac{w_0^2}{2}\right) = mg\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right);$$

welche als Grundgleichung aller Ausflussbewegungen gilt. Die linke Seite enthält die Zunahme, welche das Arbeitsvermögen der im Gefässe enthaltenen Wassermasse in der Zeit dt erleidet, die rechte Seite die gleichzeitig verrichtete Arbeit. Dabei bezeichnet m das Massentheilchen, welches während der Zeit dt unten ausströmt und gleichzeitig auch durch alle Querschnitte des Gefässes hindurchgeht. Später etwa zu berücksichtigende Widerstandsarbeiten oder Arbeits-Verluste können in Gl. I leicht hinzugefügt werden; aus diesem besonderen Grunde ist der gemeinsame Faktor m noch nicht gestrichen worden.

Will man aber w berechnen, so bedenke man, dass nach Gl. 1

$$F_0 w_0 = F w, \quad \text{daher} \quad w_0 = w \frac{F}{F_0} \quad \text{ist.}$$

Damit entsteht nach Gl. I:

$$w^2\left(1 - \frac{F^2}{F_0^2}\right) = 2g\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right), \quad \text{oder}$$

6) $$w = \sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right)}{1 - \frac{F^2}{F_0^2}}}.$$

Diese Geschwindigkeit bezeichnen wir als ideelle Ausflussgeschwindigkeit, weil bei ihrer Berechnung die Reibung vernachlässigt wurde; die wirkliche Geschwindigkeit ist kleiner (s. S. 248). Es ist $p_0 - p$ der Druckunterschied zwischen Wasserspiegel und Öffnung, $\frac{p_0 - p}{\gamma}$ die entsprechende Wassersäule; diese tritt zu h hinzu und bildet mit ihr die gesammte wirksame Druckhöhe.

In den weitaus meisten Fällen ist $p = p_0$. Da es sich nun nicht empfiehlt, wegen der selten vorkommenden Fälle ungleicher Drücke stets mit einer unbequemen Formel zu rechnen, wollen wir $\frac{p_0 - p}{\gamma}$ als mit in h steckend betrachten, so dass in Zukunft h die ganze wirksame Druckhöhe bedeuten soll. Dann wird einfacher

7) $$w = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{F^2}{F_0^2}}}.$$

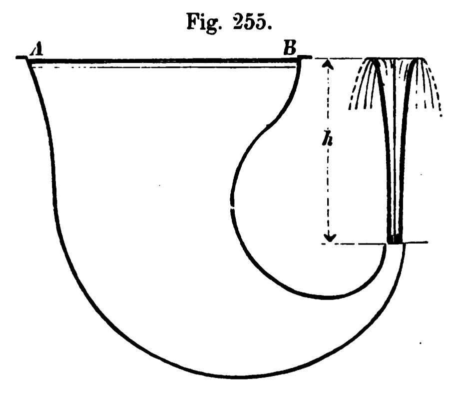
In den meisten Fällen ist auch die Ausflussöffnung F klein, gegen die Wasserspiegelflache F_0, so dass in Gl. 7 die Grösse $F^2 : F_0^2$ gegen 1 vernachlässigt und einfach

8) $$w = \sqrt{2gh}$$

gesetzt werden kann.

In diesem Falle ist die ideelle Ausflussgeschwindigkeit gleich der Fallgeschwindigkeit, welche einer Fallhöhe gleich der wirksamen Druckhöhe entspricht; oder die Geschwindigkeitshöhe des Ausflusses ist dann gleich der wirksamen Druckhöhe h.

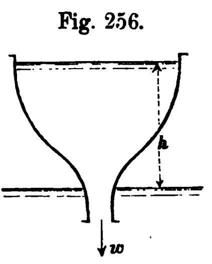
Fig. 255.



Die vorstehenden Formeln gelten auch noch für den Fall der Fig. 255, wo der Strahl lothrecht aufwärts austritt. Hierin liegt auch eine einfache Prüfung der Rechnung; denn der mit der Geschwindigkeit w austretende Strahl müsste ohne Widerstände die

Höhe $\frac{w^2}{2g} = h$ erreichen, d. h. zur Höhe des Wasserspiegels AB ansteigen. Reibung des Wassers im Gefässe und Luftwiderstand ausserhalb desselben vermindern aber die Steighöhe.

Fig. 256.



Taucht das Gefäss nach Fig. 256 in ein Unterwasser ein, so ist die Eintauchungstiefe als eine Gegendruckhöhe aufzufassen, so dass als wirksame Druckhöhe nur der Höhenunterschied h der beiden Wasserspiegel gilt.

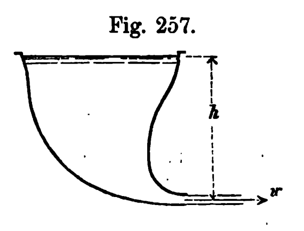
Da in jedem Zeittheilchen dt eine Raummenge $F \cdot w \cdot dt$ austritt, so ist die ideelle sekundliche Ausflussmenge in Raumeinheiten (cbm)

$$9) \qquad Q = F \cdot w = F\sqrt{2gh}.$$

b) Ideelle Ausflussmenge durch eine Seitenöffnung.

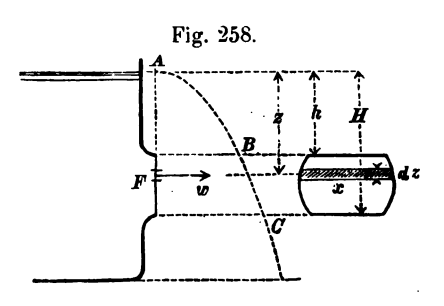
Befindet sich die Öffnung in lothrechter Ebene, so gelten die vorstehenden Gleichungen nur dann für diesen Fall, wenn die Öffnung so geringe Höhenerstreckung hat (Fig. 257), dass man für alle Punkte der Öffnung die gleiche Ausflussgeschwindigkeit w annehmen darf, so dass der ausfliessende Wasserkörper wiederum ein Prisma bildet. Es passt für diesen Fall die Entwickelung der Gl I (S. 242) vollständig, wenn man dabei die Höhe h vom Wasserspiegel bis zum Schwerpunkte der Öffnung rechnet.

Fig. 257.



Hat die Öffnung aber eine grössere Höhenerstreckung, so ist die Annahme einer überall gleichen Ausflussgeschwindigkeit nicht mehr zulässig. Man denkt sich nun (Fig. 258) aus der Öffnung F einen wagerechten Streifen von der Höhe dz, der Breite x und der Fläche $dF = x \cdot dz$, welcher um z unter dem Wasserspiegel liegt,

Fig. 258.



herausgenommen, berechnet für diesen Streifen die Ausflussgeschwindigkeit $w = \sqrt{2gz}$ und die sekundliche Ausflussmenge in Raumeinheiten (cbm)

$$dQ = dF \cdot w = dF \cdot \sqrt{2gz}.$$

Die Summation der Ausflussmengen für die sämmtlichen Streifen der Öffnung giebt dann die gesammte Ausflussmenge

$$1) \qquad Q = \sqrt{2g} \int dF \sqrt{z} = \sqrt{2g} \int_{z=h}^{z=H} x \sqrt{z} \cdot dz,$$

wenn Ober- und Unterkante der Öffnung um h bezw. H unter dem Wasserspiegel liegen.

Die Geschwindigkeit $w = \sqrt{2gz}$ lässt sich durch eine Parabel ABC mit lothrechter Achse und vom Parameter g darstellen. Die sekundliche Wassermenge ist offenbar ein prismatischer Wasserkörper, dessen Querschnitt die Ausflussöffnung, und dessen äussere Begrenzung die parabolische Cylinderfläche BC, rechtwinklig zur Bildebene, ist.

Fig. 259.

Vereinfachung der Berechnung. Die Integration der Gl. 1 ist nur möglich, wenn die Form der Öffnung gegeben, also $x = f(z)$, bekannt ist. Liegt die Öffnung aber einigermassen tief unter dem Wasserspiegel, so lässt sich das Parabelstück BC annähernd mit einer Geraden vertauschen, also eine mittlere Geschwindigkeit und eine mittlere Druckhöhe z_0, nämlich diejenige des Schwerpunktes S der Öffnung (Fig. 259) einführen, wie folgende Betrachtung zeigt:

Dem Streifen dF in der Tiefe u unter dem Schwerpunkte entspricht eine Druckhöhe $z = z_0 + u$, und eine Ausflussmenge

$$dQ = dF \sqrt{2gz} = dF \sqrt{2g(z_0 + u)}$$

$$= dF \sqrt{2gz_0} \left(1 + \frac{u}{z_0}\right)^{1/2},$$

oder, nach der binomischen Reihe

$$dQ = dF \sqrt{2gz_0} \left\{1 + \frac{1}{2}\frac{u}{z_0} - \frac{1}{8}\frac{u^2}{z_0^2} + - \cdots\right\}.$$

Ist nun die Höhe der Öffnung $H - h \leqq {}^1\!/_2 z_0$, so wird, wenn der Schwerpunkt ziemlich in der Mitte der Höhe liegt, der grösste Werth von $u \leqq {}^1\!/_4 z_0$, daher in diesem Fall $\frac{u}{z_0} \leqq \frac{1}{4}$, mithin das dritte Glied der binomischen Reihe

$$\frac{1}{8}\frac{u^2}{z_0^2} \leqq \frac{1}{128},$$

also so klein, dass man es vernachlässigen kann. Benutzt man daher von der binomischen Reihe nur die beiden ersten Glieder, so wird

$$dQ = \sqrt{2gz_0}\left\{dF + \frac{1}{2}\frac{dF \cdot u}{z_0}\right\} \quad \text{und}$$

$$Q = \sqrt{2gz_0}\left\{F + \frac{1}{2z_0}\int dF \cdot u\right\}.$$

Es ist aber in Bezug auf den Schwerpunkt $\int dF \cdot u = 0$, also

2) $$Q = F\sqrt{2gz_0}.$$

Diese von der Form der Öffnung ganz unabhängige, daher sehr bequeme Gleichung ist also anwendbar, wenn

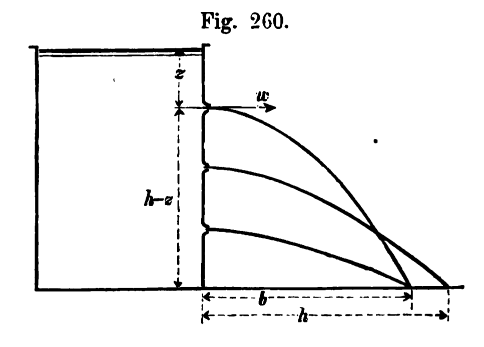
3) $$2(H - h) \leqq z_0,$$

d. h., wenn die Tiefe z_0 des Schwerpunktes der Öffnung unter dem Wasserspiegel, mindestens gleich der doppelten Höhe der Öffnung ist.

(Vgl. auch die Anmerkung S. 247).

Beispiel: Ein prismatisches Gefäss (Fig. 260) stehe auf wagerechtem Boden und sei bis zu einer Höhe h mit Wasser gefüllt. In welcher Tiefe z unter dem Wasserspiegel muss eine kleine Öffnung angebracht werden, damit der Strahl möglichst grosse Sprungweite b habe?

Fig. 260.



Je tiefer man die Öffnung legt, um so grösser wird w, um so kleiner aber die Höhenentwickelung der Parabel, und umgekehrt. Mit

$w = \sqrt{2gz}$ und $a = h - z$ wird nach Gl. 1, S. 239:

$$b = 2\sqrt{(h - z)z}.$$

Hierin sind z und $h - z$ vertauschbar. Eine Öffnung in der Tiefe $z = {}^1\!/_4 h$ giebt also dieselbe Sprungweite wie eine solche in $z = {}^3\!/_4 h$. Seinen grössten **Werth**

erreicht aber b für $z = {}^1/_2 h$. Denn $(h - z) z$ ist der Inhalt eines Rechtecks vom Umfange $2h$. Ein Rechteck von gegebenem Umfange hat aber seinen grössten Inhalt, wenn es die Form eines Quadrats von der Seite ${}^1/_2 h$ besitzt; dann ist $F = {}^1/_4 h^2 = (h - z) z$, mithin $z = {}^1/_2 h$ und $b_{max} = h$. Es entsteht dann die Wurfparabel grösster Wurfweite (1. Theil, 2. Aufl., S. 51), welche den Boden unter 45° schneidet.

Rechteckige Seitenöffnung. Mit unveränderlichem $x = b$ (s. Fig. 258, S. 244) erhält man nach Gl. 1 die ideelle Ausflussmenge durch eine rechteckige Seitenöffnung:

$$4)\qquad Q = b\sqrt{2g}\int_h^H z^{1/2}\,dz = {}^2/_3\, b\sqrt{2g}\left\{H^{3/2} - h^{3/2}\right\}.$$

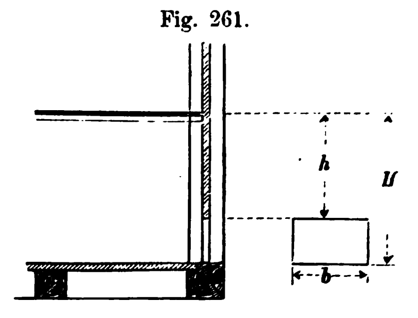
Reicht die Öffnung bis zum Wasserspiegel, so hat man einen freien Überfall, und es wird mit $h = 0$, dessen ideele Abflussmenge:

$$5)\qquad Q = {}^2/_3\, b\sqrt{2g}\, H^{3/2} = {}^2/_3\, b H\sqrt{2gH}.$$

Beispiel: Für die Schützenöffnung eines Gerinnes (Fig. 261) sei $b = 1^m$, $h = 1{,}4^m$, $H = 2^m$; dann liefert Gl. 4:

$$Q = {}^2/_3 \cdot 1 \cdot 4{,}43\left\{2{,}83 - 1{,}66\right\}$$
$$= 3{,}455 \text{ cbm/s}.$$

Fig. 261.



Es ist in diesem Falle $2(H - h) = 1{,}2^m <$ als $z_0 = 1{,}7^m$, daher auch die Annäherungsformel Gl. 2, anwendbar; sie ergiebt:

$$Q = 0{,}6 \cdot 4{,}43 \cdot \sqrt{1{,}7} = 3{,}466 \text{ cbm/s};$$

der Unterschied beider Rechnungen ist also nur unerheblich.

(Über die wirkliche Ausflussmenge dieses Zahlenbeispiels s. S. 251)

Anmerkung. Man kann die Annäherungsformel Gl. 2: $Q = F\sqrt{2gz_0}$ auch über die Grenze der Gl. 3: $2(H - h) = z_0$ hinaus ohne wesentlichen Fehler anwenden. Denn sogar für den freien Überfall mit $z_0 = {}^1/_2 H$ ergiebt sie

$$Q = bH\sqrt{2g \cdot 0{,}5\, H} = 0{,}707\, bH\sqrt{2gH},$$

während die genaue Gl. 5

$$Q = 0{,}667\, bH\sqrt{2gH}$$

liefert, so dass selbst in diesem äussersten Falle der Unterschied nur 6% beträgt.

Trapezförmige Seitenöffnung. Nach Fig. 262 ist

$$\frac{x-b}{a-b}=\frac{z-h}{H-h}, \quad \text{oder}$$

$$x=b+\frac{a-b}{H-h}(z-h).$$

Fig. 262.

Die genaue Gl. 1 ergiebt dann

$$Q=\sqrt{2g}\int_h^H\left\{b+\frac{a-b}{H-h}(z-h)\right\}z^{1/2}\,dz$$

$$=\sqrt{2g}\left\{\frac{2}{3}\,\frac{bH-ah}{H-h}\left(H^{3/2}-h^{3/2}\right)+\frac{2}{5}\,\frac{a-b}{H-h}\left(H^{5/2}-h^{5/2}\right)\right\} \quad \text{oder}$$

6) $$Q=\frac{2\sqrt{2g}}{H-h}\left\{\frac{bH-ah}{3}\left(H^{3/2}-h^{3/2}\right)+\frac{a-b}{5}\left(H^{5/2}-h^{5/2}\right)\right\}.$$

Diese Formel ist schon so verwickelt, dass man meist die Annäherungsformel Gl. 2 vorziehen wird.

c) Wirkliche Ausflussgeschwindigkeit und Ausflussmenge.

Geschwindigkeits-Ziffer (Geschwindigkeits-Koëfficient). Die bisherigen Formeln wurden entwickelt unter der Annahme reibungsloser Flüssigkeit. Für eine kleine Öffnung ergab sich darnach die ideelle Ausflussgeschwindigkeit (Gl. 8, S. 243) zu

$$w=\sqrt{2gh}.$$

Die wirkliche Ausflussgeschwindigkeit ist wegen der Reibungswiderstände, die im Gefäss auftreten, kleiner und wird erhalten, indem man den ideellen Werth noch mit einer Berichtigungszahl, der sog. Geschwindigkeitsziffer φ (<1), multiplicirt. Dann ist in Wirklichkeit

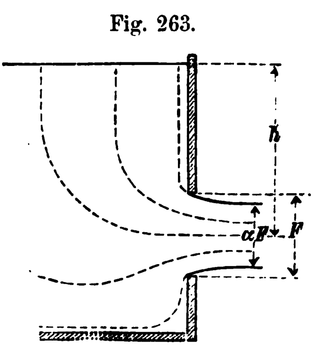
1) $$w=\varphi\sqrt{2gh}.$$

Diese Geschwindigkeitsziffer φ weicht nur wenig von der Einheit ab, beträgt bei kleiner Druckhöhe $\varphi=0{,}96$, wächst aber nach Versuchen von Weisbach (Freiberg i. S.) mit zunehmender Druckhöhe bis auf 0,99 an. Wir werden in den weiteren Beispielen stets mit

2) $$\varphi=0{,}96 \quad \text{rechnen.}$$

Einschnürung (Kontraktion). **Ausflussziffer** (Ausflusskoëfficient). In einem Gefässe, dessen Wände sich nach der Ausflussöffnung hin allmählich zusammenziehen, wie Fig. 253 (S. 240), Fig. 255 (S. 243), Fig. 257 (S 244), fliessen die einzelnen Wassertheilchen in parallelen Linien durch die Öffnung und bilden sog. Stromlinien oder Wasserfäden, welche die Öffnung rechtwinklig schneiden, so dass die sekundliche Ausflussmenge $Q = F \cdot w$ als ein Prisma vom Querschnitte F angesehen werden kann. Befindet sich aber die Öffnung in einer ebenen Wand (Fig. 263), so fliessen die Wassertheilchen in ganz verschiedenen Richtungen der Öffnung zu, wie in der Figur durch Stromlinien angedeutet ist. Diejenigen Theilchen, welche an der Wand entlang strömen, können ihre Bewegungsrichtung nicht plötzlich um 90° ändern (weil jeder Knick in der Bahnlinie eine unendlich grosse Normalbeschleunigung, d. h. unendlich grosse Kräfte erfordern würde), sondern gehen in gekrümmten Bahnlinien um die Innenkante der Öffnung herum. Erst ausserhalb des Gefässes in einer gewissen Entfernung von dem Öffnungs-Querschnitte F haben sich die Wasserfäden wieder parallel gelagert und bilden einen Strahlquerschnitt αF.

Fig. 263.



Diese Erscheinung heisst die Einschnürung (Kontraktion) des Strahles, und die Grösse α (< 1), mit der man den Öffnungs-Querschnitt F multipliciren muss, um den Querschnitt αF des zusammengezogenen Strahles zu erhalten, heisst Einschnürungs-Ziffer (Kontraktions-Koëfficient).

Mit der wirklichen Geschwindigkeit $w = \varphi \sqrt{2gh}$ (Gl. 1) wird daher die wirkliche Ausflussmenge:

3) $$Q = \alpha \cdot F \cdot w = \alpha \cdot \varphi \cdot F \sqrt{2gh},$$

In dieser Gleichung kommt das Produkt $\alpha\varphi$ zweier Berichtigungsziffern vor, das man zu einer Grösse

4) $$\mu = \alpha \cdot \varphi.$$

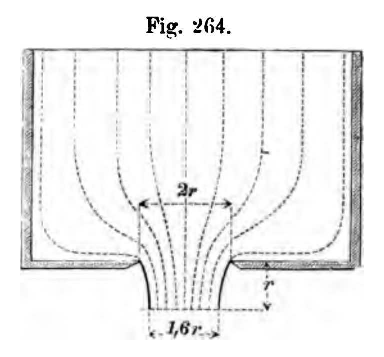
vereinigen kann, welche Ausflussziffer (Ausfluss-Koëfficient),

genannt wird, weil man die ideelle Ausflussmenge $F\sqrt{2gh}$ (Gl. 9, S. 244) noch mit μ multipliciren muss, um das wirkliche Q zu erhalten, also die wirkliche Ausflussmenge:

5) $$Q = \mu \cdot F \cdot \sqrt{2gh}.$$

Während die Geschwindigkeitsziffer φ nur wenig schwankt, auch nur wenig von der Einheit abweicht, ist die Einschnürungsziffer α und somit auch die Ausflussziffer $\mu = \alpha\varphi$ von vielen Umständen abhängig, z. B. auch von der Dicke und Beschaffenheit der Wandung, in welche die Öffnung eingeschnitten ist. Bestimmte Erscheinungen treten auf, wenn die Öffnung sich in dünner Wand befindet, oder wenn der Einfluss des Öffnungsrandes durch Zuschärfung nach Fig. 264 nahezu beseitigt ist. Befindet sich dann ausserdem die Öffnung verhältnismässig weit von den Gefässwänden entfernt, so kann man für diesen Grundfall der Einschnürung ziemlich bestimmt setzen:

Fig. 264.



6) $$\alpha = 0{,}64 \text{ und } \mu = 0{,}96 \cdot 0{,}64 = 0{,}61.$$

Ist die Öffnung ein Kreis vom Durchmesser $2r$, so erfolgt eine Einschnürung des Strahls auf $1{,}6r$, u. zw. befindet sich dieselbe im Abstande r von der Mündung (Fig. 264).

Über die **Ausflussziffern für rechteckige Seitenöffnungen** in dünner Wand haben die französischen Artillerie-Offiziere Poncelet und Lesbros 1828—1834 Versuche angestellt. (Ausführlichere Angaben findet man in Rühlmann's Hydromechanik.) Dabei wurde die Höhe h des Wasserspiegels über der Oberkante der Öffnung in einer solchen Entfernung von der Wand gemessen, wo der Spiegel noch wagerecht war, während er nach der Wand zu sich etwas senkte. Es kommt dabei wesentlich auf die Grösse der kleineren Seite b der Öffnung an, gleichgültig, ob dieselbe lothrecht oder wagerecht gerichtet ist. Einige Ergebnisse der Versuche enthält folgende Tabelle:

Ausflussziffer μ für rechtwinklige Seitenöffnungen in dünner Wand.

Höhe h des Wasserspiegels über der Oberkante der Öffnung	μ bei kleinster Seite der Öffnung von:		
	0,05 m	0,1 m	0,2 m
0,10	0,631	0,615	0,600
0,15	0,631	0,616	0,600
0,20	0,630	0,617	0,601
0,30	0,630	0,618	0,602
0,40	0,629	0,618	0,603
0,50	0,628	0,617	0,604
0,60	0,628	0,617	0,604
0,70	0,627	0,617	0,605
0,80	0,627	0,616	0,605
0,90	0,626	0,616	0,605
1,00	0,626	0,615	0,605
1,20	0,624	0,614	0,604
1,40	0,621	0,612	0,603
1,60	0,618	0,611	0,602
1,80	0,615	0,609	0,602
2,00	0,613	0,607	0,601
3,00	0,606	0,603	0,601

Mit diesen Ziffern μ ist also die rechte Seite der Gl. 4, S. 247 noch zu multipliciren, um die wirkliche Ausflussmenge zu erhalten. Es wird damit:

7) $$Q = \frac{2}{3} \mu \, b \sqrt{2g} \left\{ H^{3/2} - h^{3/2} \right\}.$$

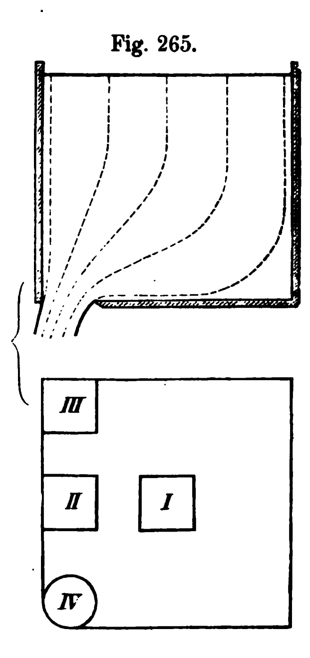
Schützenöffnungen. Befindet sich die Öffnung nicht in dünner Wand, wird sie vielmehr, wie bei Schützen, durch rechtwinklig zugeschnittene Bretter gebildet, so kann man, wenn die Unterkante der Öffnung hoch über der Sohle liegt, $\mu = 0{,}6$, wenn sie mit dieser in gleicher Höhe liegt $\mu = 0{,}68$ im Mittel setzen.

Für das Beispiel auf S. 247 (Fig. 261) würde also mit $\mu = 0{,}68$ die wirkliche sekundl. Ausflussmenge werden: $Q = 0{,}68 \cdot 3{,}455 = 2{,}35$ cbm.

Unvollständige Einschnürung (partielle Kontraktion) findet statt, wenn die Öffnung an einem Theil ihres Umfanges von Wänden umschlossen wird (Fig. 265, Öffnung II, III u. IV), so dass an

diesen Stellen ein seitliches Zuströmen und eine Ablenkung von Wasserfäden nicht vorkommt, also die Ursache der Einschnürung theilweise fortfällt. Der Strahl bekommt in Folge und nach Art dieser Ungleichmässigkeit eine abweichende Richtung, und die Ausflussziffer, also auch die Ausflussmenge wird grösser.

Fig. 265.



Ist u der ganze Umfang der Öffnung, $m \cdot u$ derjenige Theil des Umfanges, an welchem die Öffnung von Wänden eingefasst ist, so ist nach Versuchen von Bidone (1831) und Weisbach die für solche Fälle anzuwendende Ausflussziffer μ_p von der Grösse m abhängig. Ist μ_0 die Ausflussziffer unter sonst gleichen Verhältnissen für den Grundfall (dass die Öffnung nach allen Richtungen weit genug von den Gefässwänden entfernt ist), d. h. für eine Öffnung I im Grundrisse (Fig. 265), so gilt:

für rechteckige Öffnungen

8) $$\mu_{pr} = \mu_0 (1 + 0{,}155\, m),$$

für kreisförmige Öffnungen

9) $$\mu_{pk} = \mu_0 (1 + 0{,}128\, m).$$

Es wird daher:

für die Öffnung II mit $m = 1/4$

$$\mu_p = 1{,}039\, \mu_0;$$

für die Öffnung III mit $m = 1/2$

$$\mu_p = 1{,}078\, \mu_0;$$

für die Öffnung IV mit $m = 1/4$

$$\mu_p = 1{,}032\, \mu_0.$$

Unvollkommene Einschnürung. Auch wenn die Wandungen nicht ganz an den Rand der Öffnung herantreten, sondern sich von allen Seiten der Öffnung nur nähern, kann eine Verminderung der Einschnürung entstehen. Für den Grundfall war vorausgesetzt, dass die Öffnung von allen Wänden verhältnismässig weit entfernt,

also binnenseits der Öffnung ein grosser Querschnitt, und daher eine geringe Geschwindigkeit vorhanden ist (Fig. 266). Verengt sich aber das Gefäss nach der Mündung zu, so dass das Wasser der Öffnung mit grösserer Geschwindigkeit zuströmt, so vermindert sich der Einfluss der in der Querrichtung zufliessenden Stromfäden und damit die Einschnürung.

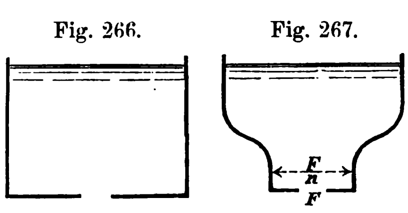


Fig. 266. Fig. 267.

Ist F der Öffnungs-Querschnitt (Fig. 267), $F:n$ der Querschnitt vor der Öffnung (worin n ein echter Bruch), so ist die Ausflussziffer μ_u bei unvollkommener Einschnürung zurückzuführen auf μ_0 in dem entsprechenden Grundfalle (mit $n = 0$). Über das Verhältnis $\mu_u : \mu_0$ hat Weisbach (Freiberg in Sachsen) im Jahre 1842 Versuche angestellt und deren Ergebnisse durch Potentialgleichungen dargestellt.

Danach ist für kreisförmige Öffnungen

10) $$\mu_{uk} = \mu_0 \left[1 + 0{,}04564\ (14{,}821^n - 1)\right],$$

für rechteckige Öffnungen

11) $$\mu_{ur} = \mu_0 \left[1 + 0{,}076\ (9^n - 1)\right].$$

Dafür kann man annähernd setzen

bei kreisförmiger Öffnung

12) $$\mu_{uk} = \mu_0\ (1 + 0{,}126\,n + 0{,}06\,n^2 + 0{,}427\,n^3)$$

mit den Ergebnissen:

$n =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{\mu_{uk}}{\mu_0} =$	1,014	1,031	1,055	1,087	1,131	1,189	1,264	1,358	1,473	1.613;

bei rechteckiger Öffnung

13) $$\mu_{ur} = \mu_0\ (1 + 0{,}175\,n + 0{,}06\,n^2 + 0{,}373\,n^3)$$

mit den Ergebnissen:

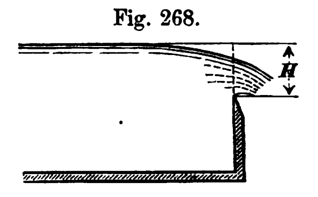
$n =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{\mu_{ur}}{\mu_0} =$	1,019	1,040	1,068	1,104	1,149	1,207	1,279	1,369	1,478	1,608.

Ausflussziffer μ für rechteckige Überfälle. Nach der ideellen Überfallmenge Gl. 5, S. 247 ergiebt sich die wirkliche Überfallmenge

14) $$Q = {}^2/_3\,\mu b H \sqrt{2gH},$$

wenn μ die Ausflussziffer, b die Breite des Überfalles und H die Höhe des ungesenkten Wasserspiegels über der Unterkante der Öffnung bedeutet (Fig. 268). Für die Ziffer μ gilt nach Versuchen der französischen Artillerie-Offiziere Poncelet und Lesbros folgende Tabelle, wobei zu bemerken ist, dass die Öffnung sich in dünner lothrechter Wand befand und dass die Höhe H in mindestens 1^m Abstand von der Öffnung gemessen wurde. Durch die Senkung des Wasserspiegels in der Nähe der Öffnung wird der Strahlquerschnitt vermindert; dieser Einfluss ist in der Zahl μ mit berücksichtigt.

Fig. 268.



Ausflussziffer μ für rechteckige Überfälle in dünner lothrechter Wand.

H	μ für	
	$b = 0{,}2^m$	$b = 0{,}6^m$
$0{,}02^m$	0,626	
0,04	0,611	
0,06	0,602	0,618
0,08	0,596	
0,10	0,593	0,606
0,15	0,590	0,600
0,20	0,585	0,593
0,30		0,587
0,40		0,587
0,50		0,587
0,60		0,585

d) Widerstandshöhen und Widerstandsziffern.

Auf S. 248 wurde die wirkliche Ausflussgeschwindigkeit $w = \varphi \sqrt{2gh}$ aus der ideellen $= \sqrt{2gh}$ abgeleitet durch Multi-

plikation der letzteren mit einer Geschwindigkeitsziffer $\varphi < 1$. Mit Rücksicht darauf, dass bei der ideellen Ausflussbewegung die wirksame Druckhöhe h sich in eine gleiche Geschwindigkeitshöhe $\frac{w^2}{2g}$ umsetzte, kann man die Beziehung zwischen den beiden Geschwindigkeiten auch so auffassen, dass bei der wirklichen Geschwindigkeit w von der wirksamen Druckhöhe h ein gewisser Theil z_0 durch Reibung aufgezehrt und daher für die Erzeugung von Geschwindigkeit unwirksam gemacht wird. Man hat hiernach

$$h - z_0 = \frac{w^2}{2g} \quad \text{oder}$$

1) $$h = \frac{w^2}{2g} + z_0 .$$

Da nun der Erfahrung zufolge

$$w = \varphi\sqrt{2gh}, \quad \text{also} \quad h = \frac{1}{\varphi^2}\frac{w^2}{2g} \quad \text{ist, so wird}$$

2) $$z_0 = \frac{w^2}{2g}\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right).$$

Man setzt

3) $$\frac{1}{\varphi^2} - 1 = \zeta_0$$

und bezeichnet ζ_0 als Widerstandsziffer für die Reibung im Gefässe. Mit $\varphi = 0{,}96$ (Gl. 2, S. 248) wird

4) $$\zeta_0 = 0{,}085.$$

Der durch Reibung verursachte Druckhöhen-Verlust

5) $$z_0 = \zeta_0 \frac{w^2}{2g}$$

heisst die Widerstandshöhe in Folge der Reibung im Gefässe. Mit diesem Werthe wird nach Gl. 1:

6) $$h = \frac{w^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w^2}{2g},$$

worin die gesammte wirksame Druckhöhe h zerlegt erscheint, in denjenigen Theil $\frac{w^2}{2g}$, der zur Erzeugung der wirklichen Geschwindigkeit w zur Verwerthung kommt, und in die Widerstandshöhe der Gefässreibung $\zeta_0 \cdot \frac{w^2}{2g}$.

Daraus ergiebt sich dann die wirkliche Geschwindigkeit

7) $$w = \sqrt{\frac{2gh}{1+\zeta_0}},$$

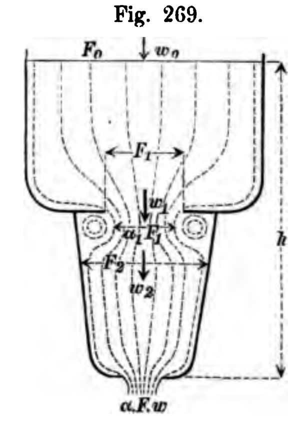
die mit $w = \varphi\sqrt{2gh}$ gleichbedeutend ist, da nach Gleichung 3 $\varphi = 1 : \sqrt{1+\zeta_0}$ ist.

Die Benutzung der Widerstandshöhen wird besonders nützlich, wenn man es mit einer verwickelteren Wasserbewegung zu thun hat, bei der verschiedene Druckhöhenverluste in Frage kommen.

e) Druckhöhenverlust in Folge plötzlicher Querschnittsänderung.

α) **Plötzliche Erweiterung.** In einem Gefässe (Fig. 269) sei im Wasserspiegel der Querschnitt F_0, die Geschwindigkeit w_0; in einer Zwischenwand befinde sich eine Öffnung F_1, welche eine Einschnürung auf $\alpha_1 F_1$ mit einer Geschwindigkeit w_1 verursacht; dann folge eine plötzliche Erweiterung des Gefässes auf F_2 mit einer Geschwindigkeit w_2; die Ausflussöffnung habe die Grösse F, der unterhalb derselben eingeschnürte Strahl den Querschnitt αF mit der Geschwindigkeit w. Seitlich des eingeschnürten Strahles $\alpha_1 F_1$ befindet sich Wasser, welches nur Wirbelbewegungen ausführt, an der regelmässig strömenden Bewegung aber nicht theilnimmt. Da während einer Zeiteinheit durch alle Querschnitte die gleiche Wassermenge hindurchströmt, so muss

Fig. 269.



1) $$F_0 w_0 = \alpha_1 F_1 w_1 = F_2 w_2 = \alpha F w$$

sein, und da $\alpha_1 F_1 < F_2$ ist, so muss $w_1 > w_2$ sein. Es trifft somit unterhalb der Zwischenwand das mit der Geschwindigkeit w_1 strömende Wasser auf eine mit geringerer Geschwindigkeit w_2 vorausgehende Wassermasse, womit ein Verlust an Arbeitsvermögen durch Stofs verbunden ist.

In der Hauptgleichung I, S. 242, war mg das während eines Zeittheilchens dt durch irgend einen (d. h. jeden) Querschnitt strömende Wassergewicht, mgh die während derselben Zeit von

dem Gewichte der gesammten im Gefässe befindlichen Wassermasse verrichtete Arbeit. Im Anschluss an die betreffende Entwickelung (S. 241) soll nun der während der Zeit dt durch Stofs herbeigeführte Verlust an Arbeitsvermögen berechnet werden. Man stellt sich die Sache so vor, als ob die Masse m mit der Geschwindigkeit w_1 auf eine mit der Geschwindigkeit w_2 vorausgehende Masse M_2 stiesse; da nun Wasser nahezu unzusammendrückbar ist, so beträgt der Verlust an Arbeitsvermögen während der Zeit dt nach Gl. 13, S. 139, mit $k = 0$

$$\frac{m \cdot M_2}{m + M_2} \frac{(w_1 - w_2)^2}{2}.$$

Wenn m gegen M_2 sehr klein ist, kann dafür $m \frac{(w_1 - w_2)^2}{2}$ geschrieben werden; setzt man dies $= m g z_1$, so ist z_1 der durch den Stofs verursachte Druckhöhenverlust, u. zw.

2) $$z_1 = \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}, \quad \text{d. h.}$$

der durch eine plötzliche Querschnittsvergrösserung erzeugte Druckhöhenverlust ist gleich der Geschwindigkeitshöhe, welche der relativen Stofsgeschwindigkeit entspricht.

Will man hiernach die Ausflussgeschwindigkeit w für den Fall der Fig. 269 berechnen, so zerlege man die wirksame Druckhöhe h in ihre einzelnen Theile, wofür sie verbraucht wird: $\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0{}^2}{2g}$ ist der zur Erzeugung von Geschwindigkeit verwerthete Theil; $\zeta_0 \frac{w^2}{2g}$ wird durch Reibung, $\frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}$ durch Stofs aufgezehrt. Also ist

3) $$h = \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0{}^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w^2}{2g} + \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}.$$

Nach Gl. 1 ist nun $w_0 = w \frac{\alpha F}{F_0}$, $w_1 = w \frac{\alpha F}{\alpha_1 F_1}$, $w_2 = w \frac{\alpha F}{F_2}$,

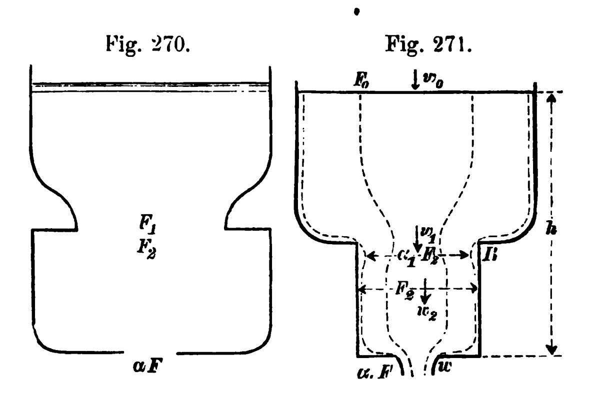
mithin $h = \frac{w^2}{2g}\left\{1 - \frac{\alpha^2 F^2}{F_0{}^2} + \zeta_0 + \alpha^2 F^2 \left(\frac{1}{\alpha_1 F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2\right\}$, oder

4) $$w = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\alpha^2 F^2}{F_0{}^2} + \zeta_0 + \alpha^2 F^2 \left(\frac{1}{\alpha_1 F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2}}.$$

Befinden sich die Öffnungen F_1 und F in dünner Wand, wie bei Fig. 269, so darf man meist $\alpha = \alpha_1 = 0{,}64$ setzen.

In dem Falle der Fig. 270 dagegen wäre $\alpha_1 = 1$, $\alpha = 0{,}64$ zu setzen. Würde die Ausflussöffnung F durch allmähliche Verengung wie in Fig. 253 (S. 240) gebildet, so hätte man auch $\alpha = 1$ zu setzen.

β) **Plötzliche Verengung**, wie bei B (Fig. 271), würde einen Stofsverlust nicht erzeugen, wenn nicht dicht unter der Verengung eine Einschnürung und gleich nachher wieder eine Ausdehnung des Strahles auf den Gefässquerschnitt erfolgte. An der Verengung bei B ist zunächst der Strahlquerschnitt $\alpha_1 F_2$ und die Geschwindigkeit w_1, unmittelbar darunter aber F_2 bezw. w_2, daher $\alpha_1 w_1 = w_2$ und der Stofsverlust

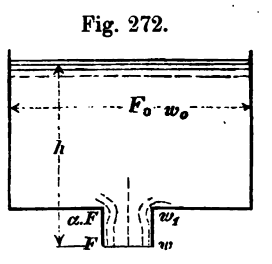


$$\frac{(w_1 - w_2)^2}{2g} = \frac{w_2^2}{2g}\left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 = \frac{w^2}{2g} \cdot \frac{\alpha^2 \cdot F^2}{F_2^2}\left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2.$$

Sonach wird aus Gl. 4

$$5) \qquad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\alpha^2 F^2}{F_0^2} + \zeta_0 + \frac{\alpha^2 F^2}{F_2^2}\left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2}}.$$

Schliesst sich an ein Gefäss unten ein kurzes cylindrisches Ansatzrohr (Fig. 272) ohne Abrundung oder Abschrägung beim Anschlusse, so entsteht beim Eintritt in das Rohr eine Strahleinschnürung auf αF mit sogleich folgender Ausweitung auf den Querschnitt F. Hier ist



$$6) \qquad h = \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} + \zeta_0 \cdot \frac{w^2}{2g} + \frac{(w_1 - w)^2}{2g},$$

ferner $w_0 = wF:F_0$ und $w_1 = w:\alpha$; somit wird, wenn F_0 sehr gross gegen F ist, und demnach $w_0 = w \cdot F:F_0$ vernachlässigt werden kann,

$$7) \quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta_0 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2}}.$$

Mit $\zeta_0 = 0{,}085$, $\alpha = 0{,}64$ wird

$$w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + 0{,}085 + 0{,}32}} = 0{,}84\sqrt{2gh},$$

Fig. 273.

wogegen bei gut abgerundetem Ansatze (Fig. 273) $w = 0{,}96\sqrt{2gh}$ sein würde.

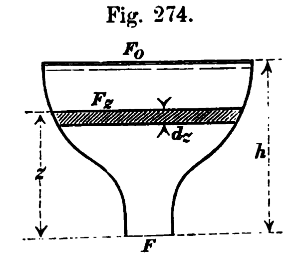
f) Ausfluss aus einer Bodenöffnung unter veränderlicher Druckhöhe.

Die Formel $w = \varphi\sqrt{2gh}$ gilt unter der Voraussetzung, dass die Bodenöffnung klein ist und dass genügender Zufluss erfolgt, um die Druckhöhe unveränderlich zu erhalten, sowie unter der Annahme, dass der Beharrungszustand bereits eingetreten sei. Findet der Zufluss nun nicht in richtiger Menge oder gar nicht statt, so ändert sich die Höhenlage des Wasserspiegels und damit die Druckhöhe. Annäherungsweise verwendet man für die nun veränderliche Ausflussgeschwindigkeit w dieselbe Gleichung wie für den Beharrungszustand, indem man mit veränderlicher Druckhöhe z einfach $w = \varphi\sqrt{2gz}$ setzt.

α) **Allmähliche Entleerung ohne Zufluss.** Zu Anfang, zur Zeit $t = 0$, sei F_0 der Wasserspiegel in der Höhe h über der Öffnung F (Fig. 274); nach t Zeiteinheiten sei die Druckhöhe auf z vermindert und der Wasserspiegel von der Grösse F_z; dann ist die augenblickliche Ausflussgeschwindigkeit $w = \varphi\sqrt{2gz}$, und während des nächsten Zeittheilchens dt die Ausflussmenge

$$1) \qquad dQ = \mu F\sqrt{2gz} \cdot dt.$$

Fig. 274.



Um hieraus dt als Differentialfunktion von z finden zu können, bedenke man, dass in dem Zeittheilchen dt der Wasserspiegel um dz sinkt, dass dieses

dz aber mit negativem Zeichen zu schreiben ist, weil z mit wachsendem t abnimmt. Der sinkende Wasserspiegel beschreibt in der Zeit dt den Raum $-F_z \cdot dz$, und diese Grösse muss $= dQ$ sein. Aus

2) $$\mu F\sqrt{2gz}\,dt = -F_z\,dz \quad \text{wird dann}$$

3) $$dt = -\frac{F_z\,dz}{\mu F\sqrt{2gz}}.$$

Daher ist zur Veränderung der Druckhöhe von h auf z die Zeit

4) $$t = -\frac{1}{\mu F\sqrt{2g}}\int_h^z \frac{F_z\,dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\mu F\sqrt{2g}}\int_z^h \frac{F_z\,dz}{\sqrt{z}}$$

erforderlich, weil den Zeitwerthen $t = 0$ und $t = t$ bezw. die Werthe $z = h$ und $z = z$ entsprechen.

Entleerung eines prismatischen Gefässes (Fig. 275). Mit $F_z = F_0$ wird nach Gl. 4,

5) $$t = \frac{F_0}{\mu F\sqrt{2g}}\int_z^h z^{-1/2}\,dz = \frac{2F_0}{\mu F\sqrt{2g}}(\sqrt{h} - \sqrt{z}),$$

und für völlige Entleerung mit $z = 0$

6) $$t = \frac{2F_0\sqrt{h}}{\mu F\sqrt{2g}}.$$

Multiplicirt man nun in Zähler und Nenner mit $\sqrt{h}$, so kann man im Zähler den ursprünglichen Gefässinhalt $V = F_0 h$, im Nenner die dem anfänglichen Zustand entsprechende sekundliche Ausflussmenge $Q_0 = \mu F\sqrt{2gh}$ einführen, und erhält

7) $$t = 2\frac{V}{Q_0}.$$

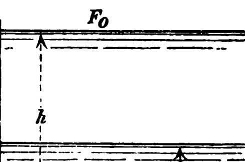


Fig. 275.

Beispiel: $F_0 = 1$ qm, $h = 1$ m, $F = 0{,}08^2\frac{\pi}{4} = 0{,}0051$ qm, $z = 0$ und $\mu = 0{,}6$ giebt $V = 1$ cbm, $Q_0 = 0{,}0135$ cbm und $t = 148{,}2$ sek.

Behielte die Druckhöhe den ursprünglichen Werth h, so würde der Ausfluss einer dem Gefässinhalte V gleichen Wassermenge die Zeit $t = V : Q_0$ erfordern; wegen der kleiner werdenden Druckhöhe erfordert die Entleerung also das Doppelte jener Zeit.

Wasseruhr mit cylindrischem Gefässe (Fig. 276). Ein Cylinder von 0,391 m Weite und 1 m Höhe habe im Boden eine kreisförmige Öffnung von 0,002 m Durchmesser mit gut abgerundetem kurzen Mundstücke, so dass $\alpha = 1$ und $\mu = \alpha\varphi = 0{,}96$ gesetzt werden kann. Die allmähliche Senkung des Wasserspiegels soll zur Zeitmessung benutzt werden. — Gl. 5 wird in diesem Falle

$$t = \frac{2 \cdot 0{,}391^2}{0{,}96 \cdot 0{,}002^2 \sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{z}) = 18\,000 (\sqrt{h} - \sqrt{z}).$$

Ist die ursprüngliche Höhe des Wasserspiegels über der Mündung $h = 1$ m, so wird für eine beliebige Zeit t

$$\sqrt{z} = 1 - \frac{t}{18\,000}.$$

Hiernach kann man für Werthe von t, die je um $^1/_2$ Stunde abnehmen, leicht z berechnen.

$t = {}^1/_2$ Stunde	$= 1800$ s.	giebt	$z = 0{,}81$ m
$t = 1$	„ $= 36\ 0$ s.	„	$z = 0{,}64$
$t = 1^1/_2$	„		$z = 0{,}49$
$t = 2$	„		$z = 0{,}36$
$t = 2^1/_2$	„		$z = 0{,}25$
$t = 3$	„		$z = 0{,}16$
$t = 3^1/_2$	„		$z = 0{,}09$
$t = 4$	„		$z = 0{,}04$

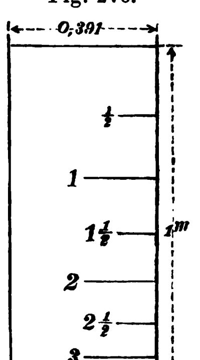


Fig. 276.

Für die letzten Theile der Entleerung trifft übrigens Gl. 5 nicht mehr zu (hat nur ideellen Werth), weil sich zuletzt um die Öffnung ein Strudel und in der Mitte der Öffnung ein von Wasser nicht erfüllter Trichter bildet, so dass der Ausfluss verlangsamt wird.

Entleerung eines trichterförmigen Gefässes. Das untere Ende des kegelförmigen Gefässes (Fig. 277) sei zu einer Öffnung F erweitert, die in der Höhe der geometrischen Spitze des Kegels liegt. Es ist $F_z = x^2\pi$, $F_0 = r^2\pi$, $x : r = z : h$, also $F_z = F_0 \cdot z^2 : h^2$ und (nach Gl. 4)

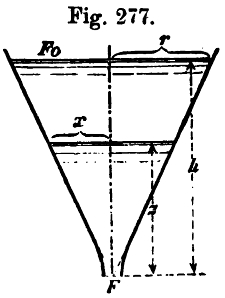


Fig. 277.

$$8)\quad t = \frac{F_0}{\mu F h^2 \sqrt{2g}} \int_z^h z^{3/2}\, dz = \frac{2}{5} \frac{F_0}{\mu F h^2 \sqrt{2g}} (h^{5/2} - z^{5/2});$$

für $z = 0$ wird dann mit $V = {}^1/_3 r^2 \pi h$ und $Q_0 = \mu F \sqrt{2gh}$:

$$9)\quad t = \frac{6}{5} \frac{V}{Q_0} = 1{,}2 \frac{V}{Q_0}.$$

Für die Entleerung eines **halbkugelförmigen** oder **halbellipsoidischen** (bis zum grössten Querschnitte gefüllten) Beckens findet man

10) $$t = \frac{7}{5}\frac{V}{Q_0} = 1{,}4\frac{V}{Q_0},$$

für die Entleerung eines **paraboloidischen** Gefässes

11) $$t = \frac{4}{3}\frac{V}{Q_0} = 1{,}33\frac{V}{Q_0}.$$

Die Gl. 7, 9, 10 und 11 lassen erkennen, dass der Zahlenfaktor für ein prismatisches Gefäss $= 2$, für jedes nach unten verengte Gefäss aber < 2 ist; er nähert sich um so mehr der Einheit, je schneller sich das Gefäss nach unten verengt. Beim Beginne des Ausflusses sinkt nämlich der Wasserspiegel schnell; mit abnehmender Druckhöhe und Geschwindigkeit geht aber der weitere Ausfluss langsamer von statten, u. zw. um so langsamer, je mehr das Gefäss nach unten verhältnismässig weit ist, so dass noch ziemlich viel Wasser bei der geringen Geschwindigkeit ausfliessen muss.

Gefässform für gleichmässige Senkung des Wasserspiegels. Die Geschwindigkeit, mit der der Wasserspiegel sinkt, ist nach Gl. 3

Fig. 278.

12) $$v = \frac{-dz}{dt} = \frac{\mu F \sqrt{2gz}}{F_z};$$

soll v sich nicht ändern, sondern gleich dem Anfangswerthe

$$v_0 = \frac{\mu F \sqrt{2gh}}{F_0} = \frac{Q_0}{F_0}$$

bleiben, so muss

13) $$\sqrt{z} : \sqrt{h} = F_z : F_0 \quad \text{sein.}$$

Soll die Innenfläche des Gefässes (Fig. 278) eine Umdrehungsfläche sein, so wird mit

$$F_z = x^2\pi \quad \text{und} \quad x^2 : r^2 = \sqrt{z} : \sqrt{h}$$

14) $$x^4 : r^4 = z : h.$$

Dies ist die Gleichung der gesuchten Meridianlinie, die man eine Parabel vierten Grades nennt. Eine bei A an die Meridianlinie gelegte Tangente hat gegen die lothrechte Achse ein Neigungsverhältnis $\frac{1}{4} r : h$. Der Inhalt des Gefässes ist

$$V = \pi \int_0^h x^2\, dz = \frac{\pi r^2}{\sqrt{h}} \int_0^h \sqrt{z}\, dz = \frac{2}{3} F_0 h.$$

Die Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels beträgt $v_0 = \frac{Q_0}{F_0}$, die (ideelle) Zeit der vollständigen Entleerung $t = \frac{h}{v_0} = \frac{F_0 h}{Q_0}$, oder, weil $F_0 h = {}^3/_2 V$ ist:

15) $$t = \frac{3}{2}\frac{V}{Q_0} = 1{,}5 \frac{V}{Q_0}.$$

Ist die Meridianlinie der Innenwand eines Gefässes eine Parabel $n$ten Grades mit $x^n : r^n = z : h$, so ist das Neigungsverhältnis einer bei A angelegten Tangente gegen die Achse ${}^1/_n\, r : h$; der Inhalt des Gefässes

16) $$V = \frac{F_0 h}{\frac{2}{n} + 1};$$

die (ideelle) Zeit der Entleerung

17) $$t = \frac{4 + 2n}{4 + n}\frac{V}{Q_0}.$$

$n = \frac{1}{2}$ (Fig. 279) giebt

18) $$t = \frac{10}{9}\frac{V}{Q_0} = 1{,}1 \frac{V}{Q_0}.$$

Fig. 279.

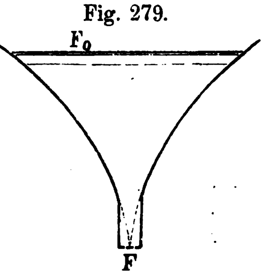
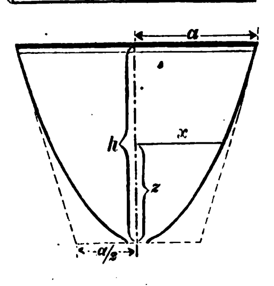


Fig. 280.



Will man ein Gefäss mit **gleichförmig** sinkendem Wasserspiegel als Wasseruhr benutzen und für die Anbringung der Theilung eine **ebene** Wand zur Verfügung haben, so kann man die Gefässform auch derartig anordnen, dass die wagerechten Querschnitte Rechtecke sind, deren Länge durchweg $= b$, während die Breite $2x$ veränderlich ist. (Fig. 280). Dann muss, wenn die Breite am oberen Rande $2a$ ist, (nach Gl. 13) $z : h = b^2 x^2 : b^2 a^2 = x^2 : a^2$ sein. Bei dieser Anordnung folgt die halbe Breite x in der einen Ansicht dem Gesetze einer gewöhnlichen (quadratischen) Parabel mit $V = {}^2/_3 F_0 h$ und $t = \frac{3}{2}\frac{V}{Q_0}$.

Dieses Gefäss hat also denselben Inhalt und dieselbe Ausflusszeit, wie das Umdrehungsgefäss Fig. 278.

β). **Ausfluss unter veränderlicher Druckhöhe, bei Zufluss von oben.** Erfolgt ein Zufluss von q cbm/s. (Fig. 281), so besteht die Ausflussmenge $dQ = \mu F \sqrt{2gz}\, dt$ (Gl. 1), während der Zeit dt, aus dem der Senkung des Wasserspiegels F_z um $-dz$ entsprechenden Wasserkörper $-F_z dz$ und dem Zuflusse $q\,dt$; sonach ist hier statt Gl. 2 zu setzen:

Fig. 281.

$$\mu F \sqrt{2gz}\, dt = -F_z dz + q\,dt;$$

die Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels wird jetzt

19) $$v = \frac{-dz}{dt} = \frac{\mu F \sqrt{2gz} - q}{F_z}, \quad \text{somit}$$

20) $$dt = -\frac{F_z dz}{\mu F \sqrt{2gz} - q} \quad \text{und}$$

21) $$t = -\int_h^z \frac{F_z dz}{\mu F \sqrt{2gz} - q} = \int_z^h \frac{F_z dz}{\mu F \sqrt{2gz} - q}.$$

Für ein prismatisches Gefäss mit $F_z = F_0$ (Fig. 282) wird

22) $$t = \frac{F_0}{\mu F \sqrt{2g}} \int_z^h \frac{dz}{\sqrt{z} - \frac{q}{\mu F \sqrt{2g}}}.$$

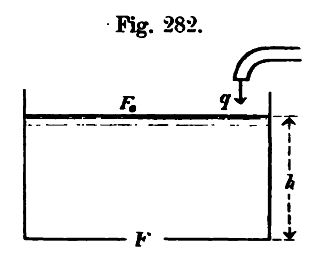


Fig. 282.

Behufs der Integration setze man

$$\frac{q}{\mu F \sqrt{2g}} = \sqrt{a}, \quad \sqrt{z} = y,$$

dann ist, wegen $q = \mu F \sqrt{2ga}$, die Grösse a diejenige Druckhöhe, bei welcher die sekundl. Ausflussmenge gerade gleich dem Zuflusse q sein würde, und $dz = 2y\,dy$. Ferner schreibe man

$$2\int \frac{y\,dy}{y - \sqrt{a}} = 2\int \frac{y - \sqrt{a} + \sqrt{a}}{y - \sqrt{a}}\, dy =$$

$$2\int dy + 2\sqrt{a}\int \frac{dy}{y - \sqrt{a}} = 2y + 2\sqrt{a}\; l\,(y - \sqrt{a})$$

$$= 2\sqrt{z} + 2\sqrt{a}\ \mathrm{l}(\sqrt{z} - \sqrt{a}),\ \text{daher}$$

23) $$t = \frac{2F_0}{\mu F\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{h} - \sqrt{z} + \sqrt{a}\cdot \mathrm{l}\,\frac{\sqrt{h}-\sqrt{a}}{\sqrt{z}-\sqrt{a}}\right\}.$$

In diesem Falle ist wegen des sekundlichen Zuflusses q eine völlige Entleerung des Gefässes unmöglich; denn für $z = a$, d. h. für $\mu F\sqrt{2gz} = q$ wird zwar nach Gl. 19 die Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels $v = 0$, zugleich wird aber auch für $z = a$ in Gl. 23 der Nenner des letzten Gliedes $= 0$, d. h. die Zeit $t = \infty$.

g) Ausfluss aus einer Seitenöffnung bei veränderlicher Druckhöhe.

Vorstehende, für den Ausfluss aus Bodenöffnungen entwickelte Gleichungen für theilweise Entleerung gelten annähernd auch für den Ausfluss aus niedrigen Seitenöffnungen, solange der Wasserspiegel oberhalb der Öffnung verbleibt,

Fig. 283.

Wir betrachten nun einen rechteckigen Kasten (Fig. 283) von der Grundfläche F_0 der sich, ohne Zufluss zu erhalten, durch einen rechteckigen Ausschnitt einer Seitenwand entleeren möge. Zu Anfang ($t = 0$) stehe das Wasser um h, nach der Zeit t um z über der Unterkante des Ausschnittes.

Dann ist während des nächsten Zeittheilchens dt die Abflussmenge nach Gl. 9, S. 254: $dQ = {}^2\!/_3\,\mu b z\sqrt{2gz}\,dt$; andererseits ist: $dQ = -F_0\,dz$, somit

1) $$dt = -\frac{3}{2}\frac{F_0}{\mu b\sqrt{2g}}\ \frac{dz}{z\sqrt{z}}\quad \text{und}$$

2) $$t = -\frac{3}{2}\frac{F_0}{\mu b\sqrt{2g}}\int_h^z \frac{dz}{z^{3/2}} = \frac{3F_0}{\mu b\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\right).$$

$z = 0$ verlangt $t = \infty$. Hiernach ist also eine Entleerung bis zur Unterkante des Einschnittes in endlicher Zeit nicht möglich, der Wasserspiegel nähert sich nur asymptotisch der Unterkante.

Beim Ausflusse durch eine Bodenöffnung des Kastens ergab sich für völlige Entleerung (Gl. 6, S. 260) ein endlicher Zeitwerth. Der Grund der Verschiedenheit beider Fälle ist folgender: Bei einer Bodenöffnung ist gegen das Ende des Ausflusses die Druckhöhe unendlich klein, die Öffnung endlich, die sekundl. Ausflussmenge unendlich klein; daher kann die unendlich kleine noch vorhandene Wassermenge in endlicher Zeit ausfliessen. — Bei einer Seitenöffnung wird aber mit der Druckhöhe auch der Querschnitt des ausfliessenden Strahles unendlich klein, die sekundliche Ausflussmenge daher unendlich klein zweiter Ordnung, so dass zum Ausfliessen der unendlich kleinen letzten Wassermenge eine unendlich grosse Zeit nöthig ist. Übrigens wird schon während einer endlichen Zeit die über der Unterkante der Öffnung noch vorhandene Wasserschicht so dünn, dass sie thatsächlich nicht mehr fliesst.

Beispiel: Es sei die Grundfläche des Gefässes $F_0 = 3\,^{qm}$, die Breite des Einschnittes $b = 0{,}1\,^{m}$, die ursprüngliche Wasserhöhe $h = 1\,^{m}$, $\mu = 0{,}6$. Dann wird

$$t = \frac{3 \cdot 3}{0{,}6 \cdot 0{,}1 \cdot 4{,}43}\left(\frac{1}{\sqrt{z}} - 1\right) = 33{,}9\left(\frac{1}{\sqrt{z}} - 1\right).$$

Für $z = 0{,}25\,^{m}$ ist $t = 33{,}9\,^{s}$;

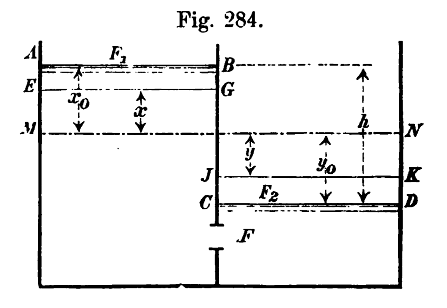
für $z = 0{,}01\,^{m}$ ist $t = 9 \cdot 33{,}9 = 305{,}1\,^{s}$;

für $z = 0{,}0001\,^{m}$ ist $t = 99 \cdot 33{,}9 = 3356\,^{s}$.

h) Ausgleichung des Wassers in Schleusenkammern.

Sind 2 Schleusenkammern (Fig. 284) mit den Grundflächen F_1 und F_2 durch eine beiderseits unter Wasser liegende Schützenöffnung F verbunden, so wird, wenn die Wasserstände AB und CD der Kammern zu Anfang einen Höhenunterschied h hatten, nach einer gewissen Zeit in beiden Kammern sich ein Ausgleichswasserspiegel MN bilden, der von den ursprünglichen Wasserspiegeln um x_0 bezw. y_0 absteht. Nach t Sekunden seien die beiden Wasserspiegel EG und JK um x bezw. y vom Ausgleich entfernt; dann ist im

Fig. 284.



Zeitpunkte t die wirksame Druckhöhe $x + y$, daher die Durchflussgeschwindigkeit in der Schützenöffnung

$$w = \varphi \sqrt{2g(x+y)}$$

und die Durchflussmenge während der Zeit dt

$$dQ = \mu F dt \sqrt{2g(x+y)}.$$

Nun ist offenbar wegen $F_1 x = F_2 y$ und $F_1 x_0 = F_2 y_0$,

1) $$x + y = y\left(\frac{F_2}{F_1} + 1\right); \quad h = x_0 + y_0 = y_0\left(\frac{F_2}{F_1} + 1\right);$$

ferner, weil in der Zeit dt die Tiefe sich um $-dy$ ändert,

$$dQ = \mu F dt \sqrt{2gy\left(\frac{F_2}{F_1} + 1\right)} = -F_2 dy; \quad \text{mithin}$$

2) $$dt = \frac{-F_2 dy}{\mu F \sqrt{2g}\sqrt{\frac{F_2}{F_1} + 1} \cdot \sqrt{y}}.$$

Für $t = 0$ ist $y = y_0$; für $t = t_1$ ist $y = 0$, wenn t_1 die Zeit bis zur Ausgleichung bedeutet, also

3) $$t_1 = \frac{F_2}{\mu F \sqrt{2g}\sqrt{\frac{F_2}{F_1} + 1}} \int_0^{y_0} y^{-1/2} dy = \frac{2 F_2 \sqrt{y_0}}{\mu F \sqrt{2g}\sqrt{\frac{F_2}{F_1} + 1}}$$

oder wegen Gl. 1 mit $y_0 = h : \left(\frac{F_2}{F_1} + 1\right)$

4) $$t_1 = \frac{2 F_2 \sqrt{h}}{\mu F \sqrt{2g}\left(\frac{F_2}{F_1} + 1\right)}$$

und, mit $\sqrt{h}$ in Zähler und Nenner multiplicirt:

5) $$t_1 = \frac{2 F_2 h}{\mu F \sqrt{2gh}\left(\frac{F_2}{F_1} + 1\right)}.$$

Multiplicirt man in Zähler und Nenner mit $F_1 : F_2$, so kann man auch schreiben:

6) $$t_1 = \frac{2 F_1 h}{\mu F \sqrt{2gh}\left(1 + \frac{F_1}{F_2}\right)}.$$

Die ganze überströmende Wassermenge beträgt

$$V = F_2 y_0 = \frac{F_2 h}{\frac{F_2}{F_1} + 1},$$

und da die sekundl. Durchflussmenge zu Anfang

$$Q_0 = \mu F \sqrt{2gh}$$

war, so folgt aus Gl. 5 (wie in Gl. 7, S. 260):

7) $$t_1 = 2 \frac{V}{Q_0}.$$

Für 2 gleich grosse Schleusenkammern wird mit $F_1 = F_2$ die überströmende Wassermenge $V = \frac{1}{2} \cdot F_2 h$, und nach Gl. 5:

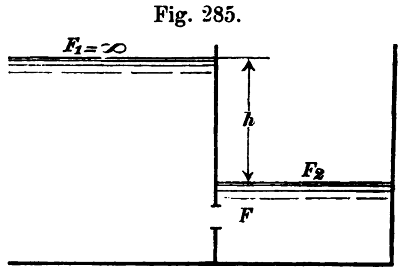
8) $$t_1 = \frac{F_2 \cdot h}{\mu \cdot F \sqrt{2gh}}.$$

Füllt sich eine Schleusenkammer aus einem ausgedehnten Oberwasser für welches $F_1 = \infty$ zu setzen ist (Fig. 285), so wird $V = F_2 h$ und nach Gl. 5:

9) $$t_1 = \frac{2 F_2 h}{\mu F \sqrt{2gh}},$$

also doppelt so gross, wie für $F_1 = F_2$ (Gl. 8).

Fig. 285.



Ähnliches gilt bei der Entleerung einer Schleusenkammer in ein ausgedehntes Unterwasser, weil dann nur F_1 mit F_2 zu vertauschen ist.

Beispiel: Es sei (Fig. 284) $F_1 = F_2 = 400$ qm, $F = 0{,}5$ qm, $h = 2$ m, $\mu = 0{,}6$. — Dann ist für die Ausgleichung der Wasserspiegel $y_0 = \frac{1}{2} h = 1$ m, also $V = 400$ cbm, $Q_0 = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 4{,}43 \sqrt{2} = 1{,}88$ cbm, und nach Gl. 7 und 8:

$$t_1 = 426 \text{ s.} = 7{,}1 \text{ min.}.$$

Ist (nach Fig. 285) nur eine Schleusenkammer von derselben Grösse wie in dem berechneten Beispiel vorhanden, so erfordert eine Füllung aus dem Oberwasser nach Gl. 9 die doppelte Zeit $2t_1 = 14{,}2$ min., ebenso auch die Entleerung der Kammer nach dem Unterwasser.

Die Berechnung dieser Zeiten ist von Bedeutung für die Beurtheilung der Leistungsfähigkeit einer Schleuse.

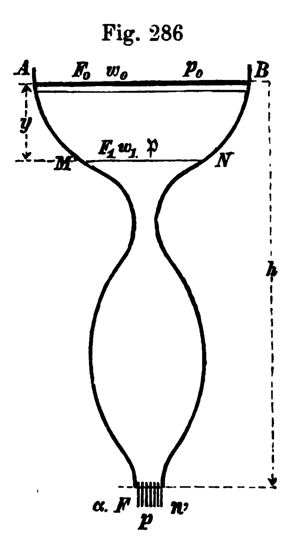
i) Hydraulischer Druck.

Ist das in Fig. 286 dargestellte Gefäss unten geschlossen, oben dem Drucke p_0, etwa dem Atsmosphärendruck ausgesetzt, so beträgt in einem Querschnitte MN, der um y unter dem Wasserspiegel liegt, der hydrostatische Druck nach S. 178

$$p_1 = p_0 + \gamma y,$$

wenn γ das Gewicht der Körpereinheit (eines Kubikmeters) Wasser ist. Findet aber eine Ausflussbewegung statt, so tritt eine bedeutende Änderung in den Druckverhältnissen ein. Der im Bewegungszustande herrschende Druck wird der hydrodynamische oder hydraulische Druck genannt, und möge mit $\mathfrak{p}$ bezeichnet werden. Wir berechnen denselben unter der Annahme, dass der Beharrungszustand eingetreten sei, dass also für die Geschwindigkeiten und die Druckhöhe Gl. I, S. 242 gelte, aber mit Berücksichtigung der Widerstände.

Fig. 286



Für das ganze Gefäss besteht daher die Beziehung

$$1) \qquad h + \frac{p_0 - p}{\gamma} = \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} + z_h;$$

darin soll z_h die gesammte Widerstandshöhe oder den gesammten Druckhöhenverlust zwischen Wasserspiegel und Mündung bedeuten. Sind (wie in Fig. 286) keine plötzlichen Querschnittsänderungen vorhanden, so ist $z_h = z_0$ (Gl. 3, S. 255), anderenfalls wären noch entsprechende z_1 (Gl. 2, S. 257) hinzuzufügen.

Betrachtet man aber nur die Wassermenge zwischen AB und MN, so ist w_1 die Ausflussgeschwindigkeit, $\mathfrak{p}$ der Gegendruck: nennt man dann z_y die auf die Höhe y kommende Widerstandshöhe, so wird, entsprechend der Gl. 1:

$$2) \qquad y + \frac{p_0 - \mathfrak{p}}{\gamma} = \frac{w_1^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} + z_y \quad \text{oder}$$

3) $$\frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \left(\frac{p_0}{\gamma} + y\right) - \left(\frac{w_1^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}\right) - z_y.$$

Mit $\mathfrak{p}$ als hydraulischem Druck ist $\mathfrak{p}:\gamma$ die **hydraulische** Druckhöhe bei MN, während $\left(\frac{p_0}{\gamma} + y\right)$ die hydrostatische Druckhöhe daselbst darstellt; man hat daher den Satz:

Beim Hindurchfliessen des Wassers durch ein Gefäss ist unter der Voraussetzung, dass der Beharrungszustand besteht und das Gefäss überall von Wasser erfüllt ist, in irgend einem Querschnitte, die hydraulische Druckhöhe gleich der hydrostatischen, vermindert um die Differenz der Geschwindigkeitshöhen an der betreffenden Stelle und im Wasserspiegel, sowie ausserdem vermindert um die zwischen beiden Stellen sich ergebende Widerstandshöhe.

Vernachlässigt man die Widerstandshöhe z_y, so kann man wegen $F_0 w_0 = F_1 w_1 = \alpha F w$ auch schreiben

4) $$\frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \left(\frac{p_0}{\gamma} + y\right) - \frac{w_0^2}{2g}\left(\frac{F_0^2}{F_1^2} - 1\right).$$

Ist an der Stelle MN (Fig. 286) der Querschnitt $F_1 < F_0$, so ist die Differenz der Geschwindigkeitshöhen positiv, mithin die hydraulische Druckhöhe kleiner als die hydrostatische, u. zw. um so mehr, je kleiner der Querschnitt F_1 ist. An den Stellen aber wo $F_1 > F_0$ ist, wird dementsprechend die hydraulische Druckhöhe grösser als die hydrostatische.

Dadurch also, dass man die vorher geschlossene Öffnung frei macht, vermindert man den Druck auf die Gefässwände in allen den Querschnitten des Gefässes, die kleiner sind als der Wasserspiegel-Querschnitt; während man ihn in allen Querschnitten verstärkt, die grösser sind als der Wasserspiegel-Querschnitt. Nur in solchen Querschnitten, die mit dem Wasserspiegel-Querschnitte gleiche Grösse haben, entsteht durch Eintritt der Bewegung keine Änderung des Druckes.

Sind die Querschnitte F und F_1 klein gegen F_0 und ist $p = p_0$, so kann man w_0^2 gegen w_1^2 vernachlässigen, so dass

$$\left(\frac{w_1^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}\right) = \frac{w_1^2}{2g} = \frac{w^2}{2g} \cdot \frac{\alpha^2 F^2}{F_1^2} = h \frac{\alpha^2 F^2}{F_1^2}$$

wird; wenn ferner an der Mündung keine nennenswerthe Einschnürung vorkommt, also $\alpha = 1$ gesetzt werden kann, erhält man nach Gl. 3, bei Vernachlässigung von z_y,

$$5)\qquad \frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + y - h\frac{F^2}{F_1{}^2}.$$

Eine Verkleinerung des Querschnittes F_1 kann eine bemerkenswerthe Verminderung des hydraulischen Druckes hervorbringen. Es kann sogar $\mathfrak{p} < p_0$, d. h. der innere Druck kleiner als der äussere Luftdruck werden, wenn

$$6)\qquad y < h\frac{F^2}{F_1{}^2} \quad \text{oder} \quad \frac{F_1}{F} < \sqrt{\frac{h}{y}} \quad \text{ist}$$

Durch eine bei F_1 in der Wand angebrachte Öffnung würde in diesem Falle nicht etwa Wasser herausfliessen, sondern durch den überwiegenden Druck der äusseren Atmosphäre, Luft ins Innere des Gefässes hineingedrückt oder, wie man dann zu sagen pflegt, von dem strömenden Wasser angesogen werden. Der Überschuss des äusseren Druckes gegen den inneren, kann durch einen etwa mit Wasser gefüllten Minderdruckmesser (s. Fig. 241, S. 228) kenntlich gemacht werden.

Fig. 287.

Wenn der äussere Überdruck die Wassersäule x (Fig. 287) im Gleichgewichte hält, so ist $\frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} - x$, also nach Gl. 5:

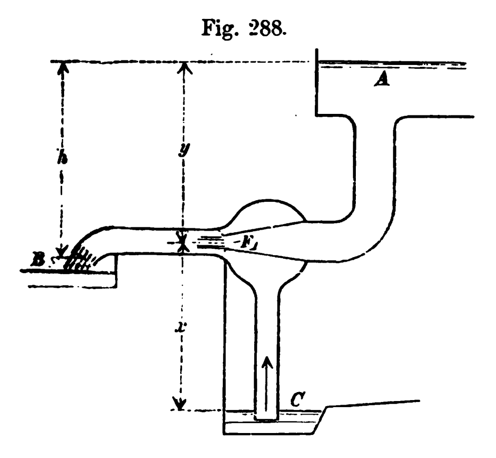
$$7)\qquad -x = y - h\frac{F^2}{F_1{}^2} \quad \text{oder} \quad x + y = h\frac{F^2}{F_1{}^2}.$$

Ist aber $x + y < h\frac{F^2}{F_1{}^2}$, so wird der äussere Atmosphärendruck das Wasser in dem seitlichen Messrohr aufwärts und in das Gefäss drücken, oder der innere Minderdruck das Wasser aus dem kleinen Nebengefäss ansaugen und mit fortführen. Dieses Ansaugen findet statt, wenn

$$8)\qquad \frac{F_1}{F} < \sqrt{\frac{h}{x+y}} \quad \text{ist.}$$

Auf diesem Verhalten beruht die Wirkungsweise des **Saughebers** oder der Saugstrahlpumpe (Fig. 288). Das zum Betriebe dienende Wasser fliesst aus dem Gerinne A abwärts durch eine Röhre, welche sich zu einer engen Düse F_1 zusammenzieht. Diese wird von einem Gehäuse umschlossen, an welches sich nach unten das Saugrohr, nach links das Ausgussrohr anschliesst. Denkt man sich zunächst bei F_1 eine Wand, welche von dem Rande der Düse nach der Wand des Ausgussrohres reicht, also das Saugrohr von letzterem trennt (in der Figur punktirt), so hat man ein von A bis B reichendes Durchflussgefäss, in welchem F_1 eine enge Stelle bildet, so dass dort ein innerer Minderdruck entsteht. Denkt man sich nun das Saugrohr voll Wasser, so wird, wenn die Bedingung der Gl. 8 erfüllt ist, das Wasser des Saugrohres gegen die gedachte Abschlusswand drücken, also, wenn letztere nun fortgedacht wird, von dem Wasserstrahle der Düse angesogen und nach B mitgenommen werden.

Fig. 288.



Diese Saugheber, bei denen nicht selten das Wasser einer Wasserleitung als Kraftquelle dient, haben den Vortheil, keine beweglichen Maschinentheile zu enthalten und deshalb keiner besonderen Wartung zu bedürfen.

Nach Gl. 5, kann man durch fortgesetzte Verkleinerung des Querschnittes F_1 die hydraulische Druckhöhe selbst bis auf Null vermindern; dies tritt ein, d. h. es wird $\mathfrak{p}:\gamma = 0$, wenn

9) $$\frac{F_1}{F} = \sqrt{\frac{h}{y + \frac{p_0}{\gamma}}} \text{ ist.}$$

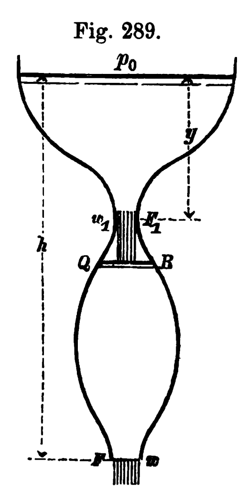
Macht man jedoch F_1 noch kleiner als es der Gl. 9 entspricht, so würde rechnungsmässig der hydraulische Druck negativ werden.

Weil aber negative Drücke in vollkommen flüssigen Körpern unmöglich sind, so hört für

10) $$\frac{F_1}{F} < \sqrt{\frac{h}{y + \frac{p_0}{\gamma}}}$$

die Gültigkeit der Gl. 5 und damit auch die Gültigkeit der Hauptgleichung I (S. 242) für die Ausflussgeschwindigkeit, aus welcher die Gleichung für den hydraulischen Druck entstand, auf. Innerhalb desjenigen Gefässtheiles, der der Bedingung nach Gl. 10 entspricht, pressen sich die Wassertheilchen nicht gegen die Wandung, füllen daher das Gefäss nicht vollkommen aus, sondern fallen in dem drucklosen Raume frei herunter. An derjenigen Stelle des Gefässes, wo der Druck $\mathfrak{p}$ wieder positiv zu werden beginnt, bildet sich ein neuer Wasserspiegel QR (Fig. 289). Man sagt in solchem Falle „die Wassersäule reisst ab“. Denkt man sich das Gefäss aus einem biegsamen Stoffe, etwa Blei, so kann man durch Zusammendrücken leicht einen so kleinen Querschnitt F_1 hervorbringen, dass diese Trennung stattfindet. Dadurch wird aber zugleich die Ausflussmenge vermindert; denn an dem engen Querschnitt F_1 ergiebt sich jetzt, weil daselbst der Gegendruck Null herrscht, eine Geschwindigkeit

Fig. 289.



$$w_1 = \sqrt{2g\left(y + \frac{p_0}{\gamma}\right)},$$

und sonach an der unteren Öffnung die Geschwindigkeit

$$w = w_1 \frac{F_1}{F} = \frac{F_1}{F} \sqrt{2g\left(y + \frac{p_0}{\gamma}\right)};$$

diese ist aber $< \sqrt{2gh}$, wenn die Bedingung der Gl. 10 erfüllt ist.

Die Hauptgleichung I (S. 242) für die ideelle Ausflussgeschwindigkeit gilt demnach nur, wenn der nach Gl. 3 berechnete Druck $\mathfrak{p}$ an allen Stellen des Gefässes sich positiv ergiebt.

Beispiel: Schliesst sich an ein weites Gefäss von 1 m Wassertiefe scharfkantig ein lothrechtes Rohr von 12 m Länge (Fig. 290), so gilt in einer Tiefe $y > 1$ m für den hydraulischen Druck $\mathfrak{p}$ (Gl. 5), wegen $F_1 = F$,

$$\frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + y - h;$$

also ist $\mathfrak{p} \lesseqgtr 0$ für $y \lesseqgtr h - \frac{p_0}{\gamma}$,

d. h. in diesem Falle, mit $h = 13$ m und $\frac{p_0}{\gamma} = h_0 = 10$ m, für $y \lesseqgtr 3$ m. Die Röhre wird daher nur in ihrer unteren Länge $h - y = h_0 = 10$ m mit Wasser ausgefüllt; oben, wo das Rohr sich dem Gefäss anschliesst, reisst die Wassersäule ab. Beim Eintritt in das Rohr wird die Geschwindigkeit

$$w_1 = \varphi \sqrt{2g(1 + h_0)} = 0{,}96 \sqrt{2g \cdot 11} = 14{,}1 \text{ m/sek.},$$

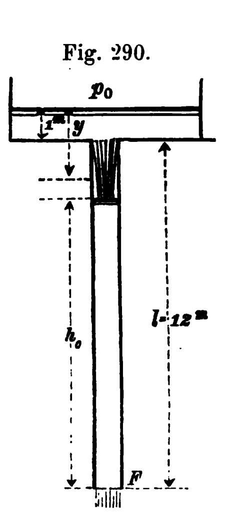
die sekundl. Wassermenge, wegen der Einschnürung am scharfen Rande,

$$Q = 0{,}64 \cdot 14{,}1 \cdot F = 9{,}02\, F;$$

daher ist am unteren Ende die wirkliche Ausflussgeschwindigkeit

$$w = \frac{Q}{F} = 9{,}02 \text{ m/s}.$$

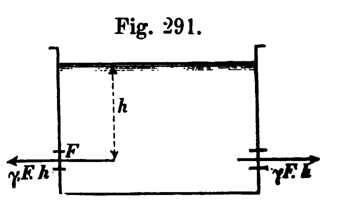
Fig. 290.



k) Gesammtdruck ausströmenden Wassers auf die Gefässwände.

Befindet sich das Wasser in einem Gefäss in Ruhe (Fig. 291), so heben sich die Druckkräfte $\gamma F h$ auf zwei einander gegenüber liegende parallele Wandflächenstücke auf. — Entfernt man aber das rechtsseitige Flächenstück F, so wird nun die nach links gerichtete Kraft $\gamma F h$ nicht mehr aufgehoben; das Gefäss erfährt jetzt einen überschüssigen Seitendruck nach links, während rechts das Wasser auszuströmen beginnt. Mit der Ausbildung des Beharrungszustandes der Ausflussbewegung vergrössert sich, wie gezeigt werden soll, der einseitige Druck fast auf das Doppelte der hydrostatischen Druckkraft.

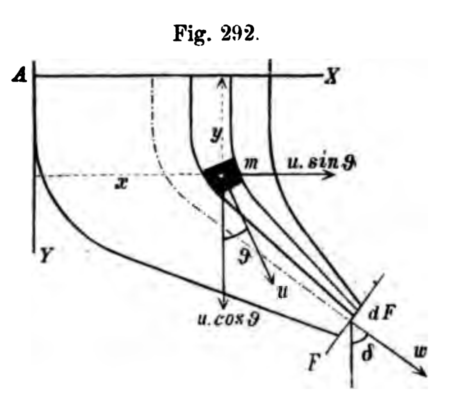
Fig. 291.



Zur Entwickelung benutzen wir ein Gefäss (Fig. 292) mit einer ziemlich bestimmt erkennbaren einfach gekrümmten Mittellinie; diese sei oben lothrecht, bilde aber an der Mündung mit der

Lothrechten einen Winkel δ. Man trenne aus der Wassermenge des Gefässes einen Stromfaden heraus, der an der Öffnung F den Querschnitt dF hat und alle diejenigen Wassertheilchen enthält, welche demnächst in Folge gegenseitiger Verdrängung durch den Öffnungstheil dF ausfliessen werden. Diejenige Wassermasse, welche durch dF während der Zeit dt ausströmt, welche daher gleichzeitig auch durch jeden anderen Querschnitt des Wasserfadens fliessen muss, sei das Massentheilchen

Fig. 292.



1) $$m = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot dF \cdot w \cdot dt.$$

Hierin ist w die mittlere Geschwindigkeit des Ausflussstrahles. Ein solches Massentheilchen des Stromfadens mit den Koordinaten x und y habe die Geschwindigkeit u, die mit der Lothrechten den Winkel ϑ bilde. Die Seitengeschwindigkeiten des Massentheilchens sind dann

$$\frac{dx}{dt} = u \sin\vartheta \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = u \cos\vartheta,$$

die entsprechenden Beschleunigungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(u \sin\vartheta)}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d(u \cos\vartheta)}{dt},$$

und die entsprechenden Ergänzungskräfte

$$\frac{m \cdot d(u \sin\vartheta)}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{m \cdot d(u \cos\vartheta)}{dt}$$

mit dem Sinne nach links, bezw. nach oben.

Für die ganze Masse des Stromfadens ergeben sich dann die Ergänzungskräfte

2) $$dX = \frac{m}{dt}\int_{w_0,0}^{w,\delta} d(u \sin\vartheta) \quad \text{bezw.} \quad dY = \frac{m}{dt}\int_{w_0,0}^{w,\delta} d(u \cos\vartheta).$$

Diese Ergänzungskräfte bezeichnen wir noch als Differentiale, weil

die Masse des Stromfadens unendlich klein ist; m ist konstant, weil es diejenige Masse bezeichnet, die in einem Zeittheilchen dt durch jeden Querschnitt des Stromfadens geht; dt ist für obige Intregrale auch konstant, weil die Integration sich über die Länge des Stromfadens erstreckt, von der Zeit aber unabhängig ist. $m:dt$ bedeutet nun die Masse, welche in jeder Sekunde durch jeden Querschnitt des Stromfadens fliesst; nach Gl. 1 ist

$$\frac{m}{dt} = \frac{\gamma}{g} \alpha \cdot dF \cdot w.$$

Für die Integrale in Gl. 2 gelten die unteren Grenzwerthe: $u = w_0$ und $\vartheta = 0$ im Wasserspiegel, die oberen: $u = w$ und $\vartheta = \delta$ an der Mündung. Bei Herstellung der unbestimmten Integrale heben sich Integral- und Differentialzeichen auf; daher wird

$$dX = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot dF \cdot w\,(w \cdot \sin\delta - 0)$$

$$dY = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot dF \cdot w\,(w \cos\delta - w_0).$$

Nehmen wir w_0 als sehr klein an, was für die meisten Fälle zutrifft, so werden die Ergänzungskräfte für die ganze Wassermenge im Gefäss erhalten, indem man dF mit F vertauscht, nämlich

3)
$$X = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot F \cdot w^2 \cdot \sin\delta,$$

$$Y = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot F \cdot w^2 \cdot \cos\delta.$$

Die Lage dieser beiden Kräfte hängt von der Form des Gefässes ab und hat gewöhnlich kein besonderes Interesse. An irgend einem Punkt angreifend gedacht, lassen sie sich zu einer Mittelkraft

4)
$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot F \cdot w^2$$

zusammensetzen, die mit der Lothrechten einen Winkel ε bildet, mit

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{X}{Y} = \operatorname{tg}\delta.$$

Die gesammte Ergänzungskraft R hat hiernach mit w gleiche Richtung, aber entgegengesetzten Sinn. Mit ihr müssen die äusseren Kräfte, die auf die Wassermasse im Gefässe wirken, im Gleichgewichte sein; es sind dies die Schwere $M \cdot g$ und der Druck der

Gefässwände gegen das Wasser. Nennt man H den wagerechten nach rechts gerichteten, V den lothrechten aufwärts gerichteten Druck der Gefässwände gegen das Wasser, so ist

$$5)\quad \begin{aligned} H &= X = \frac{\gamma}{g}\alpha F w^2 \sin\delta, \\ V &= Mg - Y = M\cdot g - \frac{\gamma}{g}\alpha F w^2 \cos\delta. \end{aligned}$$

Nach dem Satze der Wechselwirkung (1. Theil, 2. Aufl., S. 34) übt das Wasser auf die Gefässwände die Kräfte H und V nach links bezw. abwärts aus. Bei geschlossener Mündung ($w = 0$) war $H = 0$, $V = Mg$; mithin kann man die Sache so ansehen, wie wenn als Folge der Ausflussbewegung im Beharrungszustande zwei Druckkräfte X und Y entstehen, die von dem strömenden Wasser auf das Gefäss ausgeübt werden und zu den im Ruhezustande wirkenden Druckkräften hinzukommen. X hat entgegengesetzten Sinn mit $w \sin\delta$, Y bildet eine Verminderung des Bodendruckes. Die Gesammtkraft R, entgegengesetzten Sinnes mit w, heisst die Reaktion des ausfliessenden Wassers.

Man kann Gl. 4, wenn man $Q = \alpha F w$ als sekundl. Ausflussmenge einführt, auch schreiben

$$6)\quad R = \frac{\gamma}{g} Q w.$$

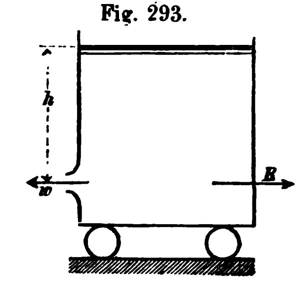


Fig. 293.

Ferner ist auch

$$7)\quad R = 2\gamma\cdot\alpha\cdot F\cdot\frac{w^2}{2g},$$

und wenn man $w^2 = \varphi^2\cdot 2gh$ einsetzt,

$$8)\quad \begin{aligned} R &= 2\cdot\gamma\cdot\alpha\cdot F\cdot\varphi^2\cdot h \\ &= 2\cdot\varphi\cdot\mu\cdot\gamma\cdot F\cdot h. \end{aligned}$$

Findet (wie in Fig. 292) an der Mündung keine Einschnürung statt, so ist $\mu = \varphi$, und weil φ^2 nicht viel von der Einheit abweicht, erreicht R fast das Doppelte der hydrostatischen Druckkraft $\gamma F h$ gegen die Mündung, wie S. 274 gesagt wurde.

Hat w wagerechte Richtung (Fig. 293), so wird, mit $\delta = 90^0$, $R = 2\varphi\cdot\mu\cdot\gamma\cdot F\cdot h$ ebenfalls wagerecht.

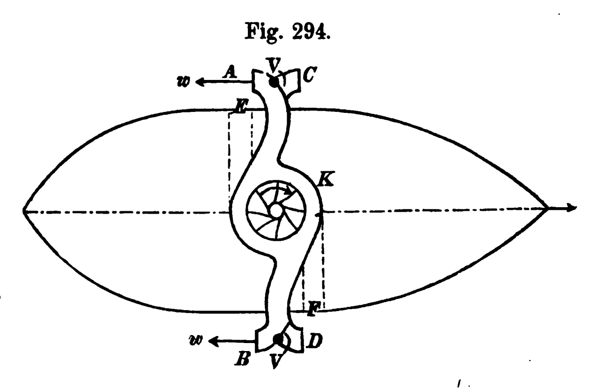
Eine gleichförmige Verschiebung des Gefässes ändert an den Kräften nichts. Es wird $w = \varphi\sqrt{2gh}$ die scheinbare (relative) Ausflussgeschwindigkeit des Wassers in Bezug auf das Gefäss;

macht man daher das Gefäss leicht beweglich, so wird der Seitendruck R des ausfliessenden Wassers einen ebenso grossen Widerstand überwinden können.

Beispiel: Auf einem Eisenbahnwagen sei ein Wasserbehälter angebracht, der unten eine Seitenöffnung mit gut abgerundetem Mundstücke von $0{,}12^{m}$ Durchmesser enthält. Der Wasserspiegel liege um $h = 2^{m}$ über der Öffnung. Das ausfliessende Wasser erzeugt gegen das Gefäss und somit gegen den Wagen, nach Gl. 8, eine wagerechte Druckkraft $= 2 \cdot 1000 \cdot 0{,}12^2 \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}96^2 \cdot 2$ $=$ rd. 42^{kg}. Ist für die Bewegung des Eisenbahnwagens die Widerstandsziffer $= {}^1/_{400}$ (s. 1. Theil, 2. Aufl., S. 259), so darf der Wagen ein Gesammtgewicht $= 400 \cdot 42 = 16800^{kg}$ haben, wenn er durch den Wasserausfluss in langsamer Bewegung erhalten werden soll.

Vorstehendes Beispiel entspricht keinem wirklichen Gebrauche. Thatsächliche Anwendung aber findet der Wasserstrahl zum Betriebe von Schiffen, sog. Strahlschiffen oder Reaktionsschiffen (vgl. Ztschr. des Ver. Deutscher Ingenieure 1876 S. 65). — Eine durch eine Dampfmaschine getriebene Kreiselpumpe K (Fig. 294) saugt durch eine Öffnung im Schiffsboden Wasser an und presst dieses in Röhren, aus denen es in wagerechter Richtung zur Ausströmung gelangt. Der beim Ausfliessen auf die Röhren und somit auf das Schiff ausgeübte Rückdruck dient zum Forttreiben des Schiffes. Beim Vorwärtsfahren (nach rechts) strömt das Wasser nach rückwärts aus den Öffnungen A und B. Durch Umstellung von Klappen V kann man den Ausfluss auch bei C und D bewirken, um das Schiff zeitweise rückwärts zu treiben. Ausfluss bei A und D bewirkt Rechtsdrehung, bei B und C Linksdrehung des Schiffes ohne Zuhülfenahme des Steuers. Die hieraus ersichtliche gute Steuerfähigkeit des Strahlschiffes hat zur Folge gehabt, dass

Fig. 294.



diese Schiffsanordnung, welche sich für den gewöhnlichen Schiffsverkehr nicht vortheilhaft erwies, in neuerer Zeit für Rettungsboote Anwendung gefunden hat (s. Génie civil, 11. September 1892, S. 332 und 27. April 1895, S. 407; Engineering 11. Oktober 1895, S. 411). Ausflussrohre E und F (punktirt) geben die Möglichkeit, auch in der Querrichtung Triebkräfte wirksam zu machen, was in der Nähe eines hülfsbedürftigen Schiffes von Wichtigkeit sein kann.

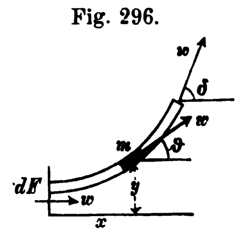
l) Druck eines Wasserstrahles gegen eine denselben auffangende Fläche.

Trifft ein Wasserstrahl mit der Geschwindigkeit w in der Nähe der Mündung auf eine feste Fläche (Fig. 295), so erfährt der Strahl eine Änderung seiner Form, indem die einzelnen Stromfäden abgelenkt werden; da nun zu jeder Grössen- oder Richtungsänderung der Geschwindigkeit eine Kraft erforderlich ist, so muss die feste Fläche auf den Wasserstrahl Kräfte ausüben.

Fig. 295.

Die Fläche sei zunächst rechtwinklig zu w, dann wird der Strahl sich nach allen Seiten auf der Fläche ausbreiten und wird nahezu einen Umdrehungskörper bilden, dessen Achse in der Mittellinie des Strahles liegt. Die Abweichung, welche durch die Einwirkung der Schwere herbeigeführt wird, kann unter der Voraussetzung, dass der Abstand zwischen der festen Fläche und der Mündung klein ist, vernachlässigt werden; dann darf man annehmen, dass die Wassertheilchen ihre Geschwindigkeit nur der Richtung nach ändern. Dort, wo die Achse des Strahles die Fläche trifft, entstehen Wirbelbewegungen, die keine besondere Beachtung erfordern.

Fig. 296.



Ein Längentheilchen eines Stromfadens (Fig. 296) habe wieder, wie auf S. 275, die Masse

$$m = \frac{\gamma}{g}\,\alpha \cdot dF \cdot w\,dt$$

und die Koordinaten x und y, dann wird

$$\frac{dx}{dt} = w \cos \vartheta, \quad \frac{dy}{dt} = w \sin \vartheta;$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d(w \cos \vartheta)}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d(w \sin \vartheta)}{dt},$$

mit den Ergänzungskräften

$$-m \cdot \frac{d(w \cos \vartheta)}{dt} \quad \text{und} \quad -m \frac{d(w \sin \vartheta)}{dt}.$$

Letztere wird durch den Beitrag eines anderen Stromfadens, der zum betrachteten symmetrisch ist, aufgehoben; die Ergänzungskraft in der x-Richtung wird für den ganzen Stromfaden, wenn derselbe eine gesammte Ablenkung δ erfährt,

$$dX = -\frac{m}{dt}\int_0^\delta d(w \cos \vartheta) = -\frac{m}{dt} w(\cos \delta - 1) = \frac{m}{dt} w(1 - \cos \delta).$$

Darin ist $\frac{m}{dt}$ wieder die Wassermasse, welche sekundlich durch den Querschnittstheil dF strömt. Ist nun Q die sekundliche Wassermenge der ganzen Mündung in ^{cbm}, die sekundliche Masse also $\gamma Q : g$, so wird die Ergänzungskraft für den ganzen Strahl

$$X = \frac{\gamma}{g} Q w (1 - \cos \delta)$$

mit dem Sinne nach rechts; ebenso gross, aber dem Strahl entgegen gerichtet, ist die äussere Kraft, die die Fläche auf den Strahl behufs der Ablenkung ausübt.

Die Kraft D (Fig. 295), mit welcher der Strahl auf die Fläche wirkt, stimmt nach dem Satze der Wechselwirkung mit X überein, ist also

1) $$D = \frac{\gamma}{g} \cdot Q \cdot w (1 - \cos \delta).$$

Ist die Fläche eben und gross genug, dass der Strahl sich völlig auf ihr auszubreiten vermag, so kann man $\delta = 90^0$ annehmen, und es wird dann

2) $$D = \frac{\gamma}{g} Q w,$$

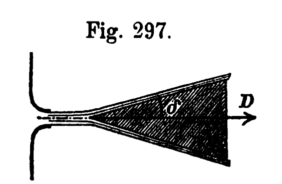
d. h. ebenso gross wie (nach Gl. 6, S. 277) der Rückdruck des ausfliessenden Wassers auf das Gefäss. — Befestigt man daher die Platte

an dem Gefässe, so geben der Rückdruck auf das Gefäss und der Druck des Strahles gegen die Platte die Summe Null, so dass das Ganze, in wagerechtem Sinne leicht beweglich gemacht, nicht in Bewegung gerathen wird.

Der Druck D des im Beharrungszustande befindlichen Strahles gegen die Platte (S. 295) ist also fast doppelt so gross wie der Druck auf die Platte sein würde, wenn sie die Mündung verschlösse.

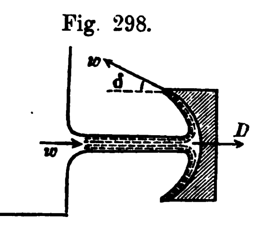
Wird der Strahl nach Fig. 297 gegen die Spitze eines Kegels geführt, so ist in Gl. 1 für δ etwa der Neigungswinkel der Kegelseiten gegen die Achse zu setzen.

Fig. 297.



Ist jedoch dem Strahl die hohle Seite einer Umdrehungsfläche entgegen gestellt (Fig. 298), so hat man in Gl. 1 $\cos\delta$ mit $\cos(\pi - \delta) = -\cos\delta$ zu vertauschen, weil die Stromfäden im Ganzen um $(\pi - \delta)$ abgelenkt werden, und es ist

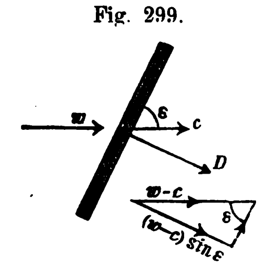
Fig. 298.



3) $$D = \frac{\gamma}{g} Q w (1 + \cos\delta).$$

Weicht aber die Fläche mit der Geschwindigkeit c im Sinne des Strahles aus, so ist in den vorstehenden Gleichungen an Stelle von w selbstverständlich die scheinbare (relative) Geschwindigkeit $(w - c)$ des Strahles in Bezug auf die Fläche einzuführen; es wird in diesem Falle, mit $Q = \alpha \cdot F(w - c)$, aus Gl. 1

Fig. 299.



4) $$D = \frac{\gamma}{g} \alpha F (w - c)^2 (1 - \cos\delta),$$

und, für $\delta = 90^0$, aus Gl. 2

5) $$D = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha F (w - c)^2.$$

Ist die den Strahl auffangende, mit der Geschwindigkeit c ($\parallel w$) ausweichende Ebene (Fig. 299) gegen die Richtungen von w und c um den Winkel ε geneigt, so zerlegt man die scheinbare Geschwindigkeit $(w - c)$ in die Seitengeschwindigkeiten $(w - c)\cos\varepsilon$ parallel der Ebene und $(w - c)\sin\varepsilon$ rechtwinklig dazu. Erstere hat, abgesehen

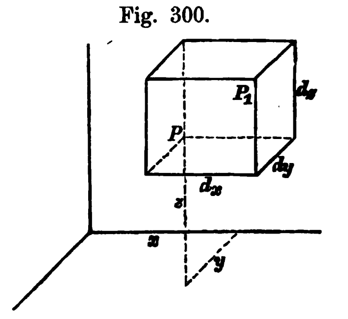
von der Reibung, die wir vernachlässigen, keine Einwirkung auf die Ebene, und letztere bewirkt, da vollkommene Flüssigkeiten nur rechtwinklige Druckkräfte ausüben, einen Normaldruck

$$D = \frac{\gamma}{g} \alpha \cdot F (w - c)^2 \sin \varepsilon. \tag{6}$$

m) L. Eulers Grundgleichungen für die Bewegung tropfbarflüssiger Körper ohne Reibung.

Ein Punkt P (Fig. 300) des flüssigen Körpers, dessen Koordinaten x, y, z sind, bewege sich während des Zeittheilchens dt nach P_1; projizirt man dann $PP_1 = ds$ in der Richtung der drei Achsen, so erhält man die drei Projektionen dx, dy und dz. Das Parallelepiped dieser drei Seiten enthalte das Massentheilchen

Fig. 300.



$$m = \frac{\gamma}{g} dx \cdot dy \cdot dz.$$

Die Geschwindigkeit desselben sei

$$w = \frac{ds}{dt}, \text{ zerlegt in}$$

$$w_x = \frac{dx}{dt}, \quad w_y = \frac{dy}{dt}, \quad w_z = \frac{dz}{dt}.$$

Der bei der Bewegung herrschende (also hydraulische) Druck im Punkt P werde $\mathfrak{p}$ genannt. Dieser Druck $\mathfrak{p}$ ist an einer Stelle P nach allen Richtungen derselbe (vergl. S. 166), wechselt aber in dem flüssigen Körper von Ort zu Ort und ist auch im Allgemeinen mit der Zeit veränderlich. Auf das Massentheilchen m wirke eine Massenkraft $m \cdot R$ mit den Seitenkräften $m \cdot X$, $m \cdot Y$ und $m \cdot Z$.

In der Richtung der x-Achse wirkt auf das Massentheilchen m auf der linken Seite des Paralleleppipeds, mit dem Sinne nach rechts, die Druckkraft $\mathfrak{p} \cdot dy \cdot dz$, auf der rechten Seite des Parallelepipeds wo der Druck auf die Flächeneinheit $\mathfrak{p} + \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x} dx$ beträgt, mit dem Sinne nach links, die Kraft $\left(\mathfrak{p} + \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x} dx\right) dy \cdot dz$. Endlich wirkt

nach rechts die Massenkraft $m \cdot X$. Daher wird die Beschleunigung in der x-Richtung:

$$\frac{dw_x}{dt} = X - \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x} \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{m} \quad \text{oder, weil}$$

$$m = \frac{\gamma}{g} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad \text{ist,}$$

1)
$$\frac{dw_x}{dt} = X - \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x} \frac{g}{\gamma}.$$

Die Geschwindigkeit w in dem Punkte P des flüssigen Körpers ist nun im Allgemeinen eine Funktion von x, y, z und t, und weil bei der Bewegung von P nach P_1 sich alle diese vier Grössen ändern, so ist dw_x (in Gl. 1) ein totales Differential, mithin

$$dw_x = \frac{\partial w_x}{\partial x} dx + \frac{\partial w_x}{\partial y} dy + \frac{\partial w_x}{\partial z} dz + \frac{\partial w_x}{\partial t} dt.$$

Hiernach wird aus Gl. 1:

$$\frac{g}{\gamma} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x} = X - \left\{ \frac{\partial w_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial w_x}{\partial t} \right\},$$

oder mit

$$\frac{dx}{dt} = w_x, \quad \frac{dy}{dt} = w_y, \quad \frac{dz}{dt} = w_z,$$

2)
$$\frac{g}{\gamma} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x} = X - \left\{ w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_x}{\partial t} \right\};$$

ebenso ergiebt sich für die beiden anderen Achsenrichtungen:

3)
$$\frac{g}{\gamma} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial y} = Y - \left\{ w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_y}{\partial t} \right\},$$

4)
$$\frac{g}{\gamma} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial z} = Z - \left\{ w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial t} \right\}.$$

In den Raum des Parallelepipeds PP_1 tritt während der Zeit dt links durch den Querschnitt $dy \cdot dz$ mit der Geschwindigkeit w_x die Raummenge $dy \cdot dz \cdot w_x \cdot dt$ ein, rechts aber wegen der Geschwindigkeit $w_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} dx$ die Menge $dy \cdot dz \cdot \left(w_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} dx \right) \cdot dt$ aus. Der Überschuss des Abflusses in der x-Richtung ist also:

$$dy \cdot dz \cdot \frac{\partial w_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dt.$$

Ebenso beträgt der Überschuss des Abflusses in der y-Richtung:

$$dx \cdot dz \cdot \frac{\partial w_y}{\partial y} \cdot dy \cdot dt,$$

und in der z-Richtung:

$$dx \cdot dy \cdot \frac{\partial w_z}{\partial z} \cdot dz \cdot dt.$$

Der Gesammt-Überschuss beträgt mithin:

$$dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \cdot \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right).$$

Unter der Annahme nun, dass sich innerhalb des flüssigen Körpers kein leerer Raum befinde und dass die Flüssigkeit nicht zusammendrückbar sei, muss der das Massentheilchen enthaltende Raum unveränderlich, d. h. vorstehender Gesammt-Überschuss Null sein, oder

$$5) \qquad \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0.$$

Diese Gleichung heisst die Kontinuitäts-Gleichung.

Man kann letztere Gleichung auch noch in anderer Weise ableiten: Der Rauminhalt des Massentheilchens m ist $dx \cdot dy \cdot dz$; soll dieser mit der Zeit sich nicht ändern, so muss

$$6) \qquad \frac{\partial (dx \cdot dy \cdot dz)}{\partial t} = 0 \quad \text{oder}$$

$$7) \qquad dy \cdot dz \frac{\partial dx}{\partial t} + dx \cdot dz \cdot \frac{\partial dy}{\partial t} + dx \cdot dy \cdot \frac{\partial dz}{\partial t} = 0$$

sein. Darin bedeutet ∂dx die Zunahme der Länge dx während der Zeit dt. Da nun die Geschwindigkeit in der x-Richtung im Punkte P mit den Koordinaten x, y, z die Grösse w_x, im Punkte P_1 aber die Grösse $w_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} dx$ hat, so muss sich die Kante dx während der Zeit dt um $\frac{\partial w_x}{\partial x} dx \cdot dt$ vergrössern, mithin ist obiges

$$\partial dx = \frac{\partial w_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dt; \quad \text{ebenso}$$

$$\partial dy = \frac{\partial w_y}{\partial y} \cdot dy \cdot dt \quad \text{und}$$

$$\partial dz = \frac{\partial w_z}{\partial z} \cdot dz \cdot dt.$$

Hiernach wird aus Gl. 7:

$$dx \cdot dy \cdot dz \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right) = 0,$$

was ebenfalls zu Gl. 5 führt.

Die Gl. 2—7 sind die allgemeinen Gleichungen für die Bewegung reibungsloser tropfbar-flüssiger Körper, welche Leonhard Euler (s. S. 238) gleichfalls im Jahre 1755 aufgestellt hat.

Es soll nun angenommen werden, dass der Beharrungszustand eingetreten sei, d. h., dass an jeder Stelle des Gefässes oder Raumes, in dem die Flüssigkeit sich bewegt, die Geschwindigkeit w und der Druck $\mathfrak{p}$ von der Zeit unabhängig, also nur Funktionen von x, y und z seien. Ebenso sollen auch die Beschleunigungen X, Y und Z nur Funktionen des Ortes sein.

Multiplicirt man Gl. 1 mit $w_x dt = dx$, so wird

$$w_x \cdot dw_x = X \cdot dx - \frac{g}{\gamma}\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x} dx \quad \text{oder}$$

$$\frac{d(w_x^2)}{2} = X dx - \frac{g}{\gamma}\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x} dx.$$

Ebenso gilt:

$$\frac{d(w_y^2)}{2} = Y dy - \frac{g}{\gamma}\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial y} dy \quad \text{und}$$

$$\frac{d(w_z^2)}{2} = Z dz - \frac{g}{\gamma}\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial z} dz.$$

Weil nun $\mathfrak{p}$ eine $f(x, y, z)$, so ist

$$\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial z} dz = d\mathfrak{p};$$

mithin ergiebt die Addition obiger drei Gleichungen, mit

$$w^2 = w_x^2 + w_y^2 + w_z^2,$$

$$d\left(\frac{w^2}{2}\right) = X dx + Y dy + Z dz - \frac{g}{\gamma} d\mathfrak{p}.$$

Ist nun an einer Stelle mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 die Geschwindigkeit w_0 und der Druck $\mathfrak{p}_0$ vorhanden, so ergiebt die Integration

$$8) \qquad \frac{w^2}{2} - \frac{w_0^2}{2} = \int_{x_0 y_0 z_0}^{x y z} (X dx + Y dy + Z dz) - \frac{g}{\gamma}(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_0).$$

In dem besonderen Falle des Ruhezustandes ist $w = w_0$, auch geht der hydraulische Druck $\mathfrak{p}$ über in den hydrostatischen Druck p, und man hat in Übereinstimmung mit Gl. 2, S. 236:

$$0 = \int_{x_0 y_0 z_0}^{x y z} (X dx + Y dy + Z dz) - \frac{g}{\gamma}(p - p_0).$$

Hiernach kann man

$$\int_{x_0 y_0 z_0}^{x y z} (X dx + Y dy + Z dz) \quad \text{mit} \quad \frac{g}{\gamma}(p - p_0)$$

vertauschen, wenn p und p_0 die hydrostatischen Drücke an den Stellen x, y, z und x_0, y_0, z_0 sind, die den gegebenen Massenkräften im Ruhezustand entsprechen. Durch deren Einführung vereinfacht sich Gl. 8 zu

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = \frac{p - p_0}{\gamma} - \frac{\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_0}{\gamma}.$$

Bezieht sich die Geschwindigkeit w_0 auf einen freien Wasserspiegel, so ist dort der hydraulische Druck $\mathfrak{p}_0$ gleich dem hydrostatischen Drucke p_0, mithin wird

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = \frac{p - \mathfrak{p}}{\gamma} \quad \text{oder}$$

9) $$\frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} - \left(\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}\right).$$

Wir haben hiermit das Gesetz der hydraulischen Druckhöhe (s. S. 270) auf anderem Wege erhalten.

Ist noch die Schwere die einzige wirkende Massenkraft und richtet man die positive y-Achse lothrecht abwärts, so ist

$$p = p_0 + \gamma y \quad \text{also}$$

$$\frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \left(\frac{p_0}{\gamma} + y\right) - \left(\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}\right).$$

Hat man also ein Gefäss, aus dem das Wasser durch eine um h unter dem Wasserspiegel liegende Öffnung mit der Geschwindigkeit w ausströmt und herrscht an der Mündung ein Gegendruck p_m, so ist auch der hydraulische Druck $\mathfrak{p}$ dort $= p_m$, und man erhält für $y = h$:

$$\frac{p_m}{\gamma} = \left(\frac{p_0}{\gamma} + h\right) - \left(\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}\right)$$

oder die bekannte Gleichung (S. 269)

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = h + \frac{p_0 - p_m}{\gamma}.$$

An die Stelle der Kontinuitätsgleichung (Gl. 5, S. 284) tritt hier

$$F_0 w_0 = F w.$$

2. Bewegung des Wassers in Röhren.

a) Leitungswiderstand in geraden cylindrischen Röhren.

Beim Durchfliessen einer längeren Röhre vom Querschnitt F zeigt sich ein besonderer Widerstand, ein besonderer Druckhöhenverlust oder eine Widerstandshöhe z (s. S. 255). Dieser von der Reibung herrührende Widerstand folgt wesentlich anderen Gesetzen als der Reibungswiderstand fester Körper (I. Theil, 2. Aufl., S. 191). Er ist nämlich unabhängig von dem Drucke des Wassers, nahezu verhältnisgleich mit der Berührungsfläche und mit dem Quadrate der Geschwindigkeit w, also auch mit der Geschwindigkeitshöhe $\frac{w^2}{2g}$. Ist u der innere Umfang des Röhrenquerschnittes, so berühren sich in einer Röhre von der Länge l das Wasser und die Wandung in einer Fläche $u \cdot l$. Der Reibungswiderstand W in der Röhre lässt sich daher schreiben

1) $$W = \varkappa u l \frac{w^2}{2g}.$$

Um die entsprechende Widerstandshöhe z zu finden, berechnen wir (nach S. 256/57) die während eines Zeittheilchens dt verrichtete Widerstandsarbeit $d\mathfrak{A}$, und setzen

$$d\mathfrak{A} = m g z,$$

wobei m wieder diejenige Wassermasse bedeutet, welche während der Zeit dt jeden Querschnitt durchströmt. Bei einer Geschwindigkeit w ist $w \cdot dt$ der Gleitweg des Wassers in der Röhre während der Zeit dt, mithin $d\mathfrak{A} = W \cdot w \cdot dt$; ferner ist $mg = \gamma \cdot F \cdot w \cdot dt$, daher wird

$$z = \frac{d\mathfrak{A}}{mg} = \varkappa \cdot u \cdot l \frac{w^2}{2g} \frac{w\,dt}{\gamma \cdot F \cdot w \cdot dt}, \quad \text{oder}$$

2) $$z = \frac{\varkappa}{\gamma} \frac{u\,l}{F} \frac{w^2}{2g}.$$

Bezeichnet man mit β die Widerstandsziffer für Wasser in Röhren beliebiger Querschnittsform und setzt $\varkappa = \gamma\beta$, so wird

3) $$z = \beta \frac{u\,l}{F} \frac{w^2}{2g}.$$

Für cylindrische Röhren vom inneren Durchmesser d ist im Besonderen $u = d\pi$, $F = {}^1/_4\, d^2\pi$, mithin

$$\frac{u}{F} = \frac{4}{d} \quad \text{und} \quad z = \beta 4 \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}$$

oder, wenn man für diesen besonders häufigen Fall

4) $$4\beta = \lambda$$

setzt, und λ als Widerstandsziffer cylindrischer Wasserleitungsröhren bezeichnet,

5) $$z = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}.$$

Nach Dupuit kann als erste Annäherung angenommen werden:

6) $$\lambda = 0{,}03.$$

Eingehendere Versuche haben aber gezeigt, dass λ nicht nur mit dem Grade der Rauhigkeit der inneren Röhrenfläche sich ändert, sondern auch noch in gewisser Weise von der Röhrenweite d und der Geschwindigkeit w abhängt, dass also die vorläufig angegebene Proportionalität des Widerstandes W mit der Fläche $u \cdot l$ und dem Quadrate der Geschwindigheit nicht genau zutrifft.

Nach ausgedehnten Versuchen des französischen Ingenieurs Darcy vom Jahre 1857 ist für neue eiserne oder bleierne Röhren nach Fortlassung entbehrlicher Ziffern:

7) $$\lambda = \left(0{,}02 + \frac{0{,}0005}{d}\right);$$

so dass λ nur von d und nicht auch von w abhängig wäre.

G. Hagen (Berlin) hat aus eigenen und Darcy's Versuchen eine Formel abgeleitet, die auf die Temperatur des Wassers Rücksicht nimmt. Es möge hier nur der abgerundete Werth für eine Temperatur von 10^0 C. angegeben werden:

8) $$\lambda = 0{,}0236 + \frac{0{,}000\,08}{d w}.$$

Innerhalb der gewöhnlich vorkommenden Grenzen für d und w schwankt λ nach Gl. 8 nur zwischen 0,024 und 0,027, so dass man (nach Grashof, Theoretische Maschinenlehre, 1. Bd, S. 483), wenn man wegen etwaiger Unreinigkeit der Röhren den Mittelwerth noch mit etwa 1,2 multiplicirt, wieder zu $\lambda = 0{,}03$ (Gl. 6) gelangt.

Für Holzröhren, wie sie im Gebirge noch vorkommen, pflegt man etwa $\lambda = 0{,}035$, für Röhren, die durch feste Niederschläge aus dem Wasser stark verunreinigt sind, $\lambda = 0{,}04$ zu setzen, ausserdem im letzteren Fall noch eine Querschnittsverminderung zu berücksichtigen.

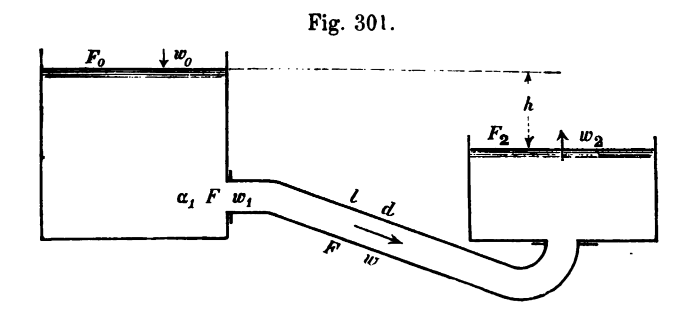
Es sei noch erwähnt, dass der franz. Ing. Flamant (s. Annales des ponts et chaussées 1892, Sept., S. 301)

9) $$\lambda = \frac{m}{\sqrt[4]{dw}}$$

entwickelt hat, worin für glatte Röhren aus Blei, Glas, Schmiedeisen $m = 0{,}0102$ bis $0{,}0122$, für neue Gusseisenröhren $m = 0{,}0145$, für gebrauchte Gusseisenröhren $m = 0{,}0181$ zu setzen ist.

Sind 2 Gefässe (Fig. 301) durch eine Röhre von der Weite d, der Länge l und dem Querschnitt F mit einander verbunden, so ermittelt man die Geschwindigkeit w in der Röhre, indem man (wie auf S. 257) die wirksame Druckhöhe in die einzelnen Theile

Fig. 301.



zerlegt, wozu sie verwendet wird. Dabei verfolgt man die Wasserbewegung vom Ober- bis zum Unterwasser, um keine Widerstandshöhe zu übersehen. Das Unterwasser ist als Mündung zu betrachten; daher ist an Stelle der beiden ersten Glieder der rechten Seite von Gl. 3, S. 257 zu schreiben: $\frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}$. An Widerstandshöhen kommen in Betracht: zuerst der Reibungsverlust im Obergefässe mit $\zeta_0 \frac{w_1^2}{2g}$, sodann der Stoſsverlust bei scharfkantigem Anschlusse der Röhre (S. 258) mit $\frac{(w_1 - w)^2}{2g}$, dann der Reibungsverlust in der Röhre mit $\lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}$, ferner der Stoſsverlust beim Übertritte des Wassers aus der engen Röhre in das Untergefäss mit $\frac{(w - w_2)^2}{2g}$, endlich der Reibungsverlust im Untergefäss, wie bei

umgekehrter Bewegung, mit $\zeta_0 \frac{w^2}{2g}$. Sonach wird

$$10)\quad h = \frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w_1^2}{2g} + \frac{(w_1 - w)^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} + \\ + \frac{(w - w_2)^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w^2}{2g}.$$

Um die verschiedenen Geschwindigkeiten auf w zurückzuführen, setze man $w_2 = \frac{wF}{F_2}$, $w_0 = w\frac{F}{F_0}$, $w_1 = \frac{w}{\alpha_1}$; dann wird

$$11)\quad 2gh = w^2 \left\{ \frac{F^2}{F_2^2} - \frac{F^2}{F_0^2} + \zeta_0 \frac{1}{\alpha_1^2} + \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 + \lambda \frac{l}{d} + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{F}{F_2}\right)^2 + \zeta_0 \right\}.$$

Ist nun, wie gewöhnlich, der Röhrenquerschnitt F sehr klein gegenüber F_0 und F_2, so verschwinden die beiden ersten Glieder des Klammerausdrucks, der vorletzte Summand wird $= 1$, und man erhält

$$12)\quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta_0\left(\frac{1}{\alpha_1^2} + 1\right) + \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 + \lambda \frac{l}{d}}}.$$

Mit $\zeta_0 = 0{,}085$ (s. S. 255) und $\alpha_1 = 0{,}64$ wird dann (rund)

$$13)\quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1{,}6 + \lambda \frac{l}{d}}}.$$

Beispiel: $h = 2^{\,\mathrm{m}}$, $l = 20^{\,\mathrm{m}}$, $d = 0{,}1^{\,\mathrm{m}}$ und $\lambda = 0{,}03$ giebt

$$w = \sqrt{\frac{2g \cdot 2}{1{,}6 + 0{,}03 \cdot 200}} = 2{,}27^{\,\mathrm{m}},$$

$$Q = {}^1/_4\, d^2 \pi \cdot w = 0{,}018^{\,\mathrm{cbm}}.$$

Den Einfluss der Widerstände zeigt der Vergleich von w mit $\sqrt{2g \cdot 2} = 6{,}26^{\,\mathrm{m}}$.

Soll die erforderliche Röhrenweite d bei gegebener sekundl. Wassermenge Q, gegebenen h und l berechnet werden, so bedenke man, dass

$$Q = \frac{d^2\pi}{4} w = \frac{d^2\pi}{4} \sqrt{\frac{2gh}{1{,}6 + \lambda \frac{l}{d}}}$$

ist, woraus sich

$$14)\qquad d^5 = \frac{16\,Q^2}{\pi^2\,2\,g\,h}(1{,}6\,d + \lambda\,l)$$

ergiebt. Man löst diese Gleichung nach d auf, indem man vorläufig auf der rechten Seite das Glied $1{,}6\,d$ vernachlässigt, hiermit einen Annäherungswerth

$$15)\qquad d' = \sqrt[5]{\frac{16\,Q^2\,\lambda\,l}{\pi^2\,2\,g\,h}}$$

oder für $\lambda = 0{,}03$ (Gl. 6)

$$16)\qquad d = 0{,}3\sqrt[5]{\frac{Q^2 l}{h}}$$

erhält, und diesen dann auf der rechten Seite der Gl. 14 einführt.

Setzt man für eine Leitung, die mit Sicherheit für längere Zeit, d. h. auch nachdem sich Niederschläge in den Röhren festgesetzt haben, die Wassermenge Q liefern soll, in Gl. 15 aber den Werth $\lambda = 0{,}04$ und, wegen der Verengung des Querschnittes, $^5/_4\,Q$ statt Q, so erhält man

$$17)\qquad d = 0{,}35\sqrt[5]{\frac{Q^2 l}{h}}.$$

Beispiel: Eine Rohrleitung soll $Q = 0{,}01$ cbm/s. liefern bei einer Länge $l = 100$ m und einer verfügbaren Druckhöhe $h = 2$ m. Wie gross muss d sein? Nach Gl. 16 ist vorläufig

$$d = 0{,}3\sqrt[5]{\frac{0{,}01^2 \cdot 100}{2}} = 0{,}104\ \text{m}.$$

Hiermit wird aus Gl. 14

$$d^5 = \frac{16 \cdot 0{,}01^2}{\pi^2 \cdot 2\,g \cdot 2}(1{,}6 \cdot 0{,}104 + 0{,}03 \cdot 100)$$

und $d = 0{,}105$ m, also nur sehr wenig grösser als der vorläufige Werth, so dass schon Gl. 16 in den meisten Fällen genügt. — Nach Gl. 17 dagegen erhält man für Röhren, in denen leicht Niederschläge entstehen können,

$$d = 0{,}35\sqrt[5]{\frac{0{,}01^2 \cdot 100}{2}} = 0{,}121\ \text{m}.$$

b) Benutzung der Druckmesserröhren (Piëzometer).

Strömt Wasser durch ein Leitungsrohr mit der Geschwindigkeit w, und bringt man an den Stellen A und B (Fig. 302) des Leitungsrohres lothrechte Beobachtungsröhren an, so wird in diesen

das Wasser, dem hydraulischen Druck entsprechend, bis zu den Höhen x_1 und x_2 sich erheben und in diesen Höhen in Ruhe verbleiben. Solche Röhren heissen deshalb Druckmesser oder Piëzometer. (Letzterer Name kommt von dem griechischen Worte πιέζω = drücken.) Nach Gl. 3, S. 270 ist für die Stelle A welche um y_1 unter dem Oberwasser liegt,

$$x_1 = \left(\frac{p_0}{\gamma} + y_1\right) - \left(\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}\right) - z_1,$$

wenn z_1 die Summe der Widerstandshöhen zwischen dem Oberwasser und der Stelle A ist. — Ebenso gilt dann für die Stelle B

$$x_2 = \left(\frac{p_0}{\gamma} + y_2\right) - \left(\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}\right) - z_2.$$

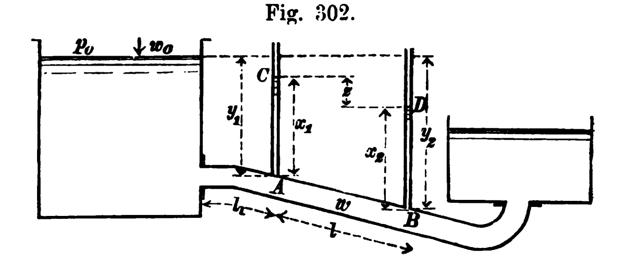
Zieht man von dieser Gleichung die vorige ab, so entsteht:

$$x_2 - x_1 = y_2 - y_1 - (z_2 - z_1) \quad \text{oder}$$

$$(y_2 - x_2) - (y_1 - x_1) = (z_2 - z_1).$$

Nun ist $(y_2 - x_2)$ die Tiefe des Druckmesserstandes D unter dem Oberwasser, $(y_1 - x_1)$ diejenige des Druckmesserstandes C. Der Unterschied beider giebt den Höhenunterschied $z = z_2 - z_1$ der Druckmesser-Wasserspiegel C und D. Es bedeutet aber $z = z_2 - z_1$ die auf die Strecke $AB = l$ entfallende Widerstandshöhe; mithin wird die zwischen zwei Stellen A und B einer Röhrenleitung auftretende Widerstandshöhe unmittelbar gemessen durch den Höhenunterschied der Wasserspiegel der in A und B angebrachten Druckmesserröhren.

Fig. 302.



Zu berechnen ist diese Widerstandshöhe für eine Rohrleitung von der Länge l und dem Durchmesser d, nach Gl. 5, S. 288:

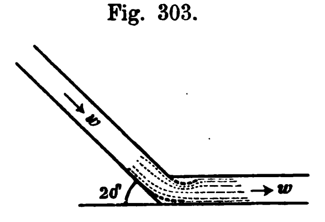
$$z = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}.$$

Solche Druckmesser sind benutzt worden zur Ermittelung der Ziffer λ; aber auch zur Messung derjenigen Widerstandshöhen, die in einer Rohrleitung durch Richtungsänderungen, Abstellvorrichtungen (Schieber, Hähne, Ventile, Klappen) u. dgl. verursacht werden.

c) Widerstand in Knieröhren und gekrümmten Röhren.

Erfährt eine Röhre einen scharfen Knick um einen Winkel 2δ (Fig. 303), wie solches bei Holzröhren vorkommt, so kann das Wasser dieser plötzlichen Richtungsänderung nicht folgen; vielmehr wird unmittelbar nach dem Knick eine Einschnürung und Wiederausbreitung des Wasserquerschnitts erfolgen, was nach S. 258 einen Stossverlust erzeugt. Versuche, welche Weisbach darüber angestellt hat, sind durch die Formel

Fig. 303.



1) $$\zeta_2 = 0{,}9457 \sin^2\delta + 2{,}047 \sin^4\delta$$

zum Ausdrucke gebracht, wenn $\zeta_2 \dfrac{w^2}{2g}$ die Widerstandshöhe bedeutet.

$\delta = 10^0$ giebt $\zeta_2 = 0{,}046$,
„ $= 20^0$ „ „ $= 0{,}139$,
„ $= 30^0$ „ „ $= 0{,}364$,
„ $= 40^0$ „ „ $= 0{,}740$,
„ $= 45^0$ „ „ $= 0{,}984$.

Für Krümmer, deren Mittellinie nach einem Viertelkreise vom Halbmesser ϱ geformt ist, gilt mit derselben Bedeutung

2) $$\zeta_2 = 0{,}131 + 1{,}847 \left(\frac{{}^1\!/\!_2\, d}{\varrho}\right)^{3,5}.$$

Für $\dfrac{{}^1\!/\!_2\, d}{\varrho}$	$= 0{,}2$	$0{,}3$	$0{,}4$	$0{,}5$	$0{,}6$
wird ζ_2	$= 0{,}138$	$0{,}158$	$0{,}206$	$0{,}294$	$0{,}440$.

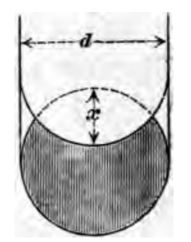
Entspricht die Krümmung nicht einem Viertelkreise, sondern einem Mittelpunktswinkel von δ^0, so setzt man die Widerstandshöhe

3) $$z = \zeta_2 \frac{\delta}{90} \frac{w^2}{2g}.$$

d) Widerstand beim Durchgange durch Schieber, Hähne, Drosselklappen und Ventile.

Diese Widerstände beruhen sämmtlich auf Einschnürung des Wasserquerschnitts. — Weisbachs Versuche vom Jahre 1842 haben zu folgenden Ergebnissen geführt.

Fig. 304.

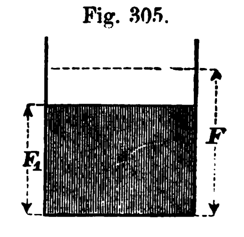


Schieber in kreisförmigem Rohre:

Ist F der Querschnitt des unverengten Rohres, w die Geschwindigkeit in demselben, F_1 der durch den Schieber verengte Querschnitt, $\zeta_3 \frac{w^2}{2g}$ die Widerstandshöhe, so ist nach (Fig. 304) bei

$\frac{x}{d} =$	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8
$\frac{F_1}{F} =$	0,948	0,856	0,740	0,609	0,466	0,315	0,159
$\zeta_3 =$	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8.

Fig. 305.



Schieber im Rohre von rechteckigem Querschnitte (Fig. 305):

$\frac{F_1}{F} =$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
$\zeta_3 =$	0,09	0,39	0,95	2,08	4,02	8,12	17,8	44,5	193.

Hahn mit kreisförmiger Durchgangsöffnung (Fig. 306):

Stellwinkel $\delta =$	10°	20°	30°	40°	50°	60°	65°	82°
$\frac{F_1}{F} =$	0,850	0,692	0,535	0,385	0,250	0,137	0,091	0
$\zeta_3 =$	0,29	1,56	5,47	17,3	52,6	206	486	∞.

Hahn mit rechteckiger Durchgangsöffnung (Fig. 306):

Stellwinkel $\delta =$	10°	20°	30°	40°	50°	67°
$\frac{F_1}{F} =$	0,849	0,687	0,520	0,352	0,188	0
$\zeta_3 =$	0,31	1,84	6,15	20,7	95,3	∞.

Drosselklappe in kreisförmigem Rohre (Fig. 307):

Fig. 306.

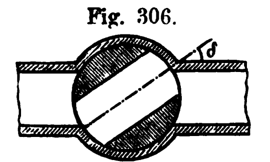


Fig. 307.

Stellwinkel $\delta =$	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	90^0
$\zeta_3 =$	0,52	1,54	3,91	10,8	32,6	118	751	∞.

Drosselklappe in rechteckigem Rohre (Fig. 307):

Stellwinkel $\delta =$	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	90^0
$\zeta_3 =$	0,45	1,34	3,54	9,27	24,9	77,4	368	∞.

Für Kegelventile (Fig. 308) ist mit F_1 als kleinstem Durchflussquerschnitt

$$\zeta_3 = \left(1{,}537 \frac{F}{F_1} - 1\right)^2.$$

Fig. 308.

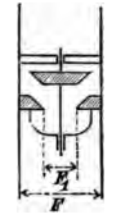
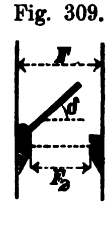


Fig. 309.



Klappenventile (Fig. 309) für die Öffnung im Ventilsitz

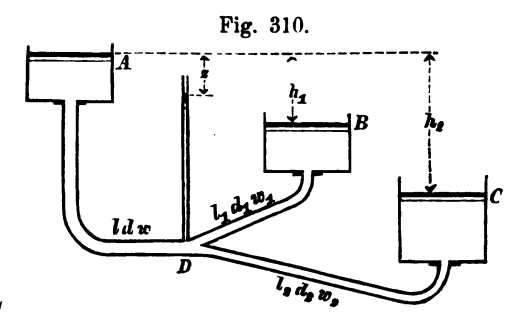
$$F_2 = 0{,}535\, F,$$

und $\delta =$	70^0	60^0	50^0	45^0	40^0	35^0	30^0	25^0	20^0	15^0
$\zeta_3 =$	1,7	3,2	6,6	9,5	14	20	30	42	62	90.

e) Wasserleitung mit Verzweigung.

Von einem Hauptbehälter A (Fig. 310) werden zwei Stellen B und C mit Wasser versorgt. Von A bis D führe ein Hauptrohr von der Länge l und der Weite d. Hier theile sich das Rohr in die Zweige von den Abmessungen l_1, d_1 und l_2, d_2. Zur Berechnung der nach B und C fliessenden Wassermengen Q_1 und Q_2 denke man sich an der Verzweigungsstelle D ein Druckmesserrohr angebracht, dessen Wasserspiegel um z unter dem Oberwasser liegen möge. Dann ist z

Fig. 310.



die wirksame Druckhöhe von A bis D für die Geschwindigkeit w; unter Vernachlässigung der Krümmungswiderstände wird nach Gl. 13, S. 290:

$$1)\qquad z = \frac{w^2}{2g}\left(1{,}6 + \lambda \frac{l}{d}\right).$$

Wenn der Übergang aus dem Hauptrohr in die beiden Zweige allmählich erfolgt, und die Unterschiede der Geschwindigkeiten w, w_1 und w_2 gering sind, kann man die hieraus entstehenden Druckhöhenverluste wegen ihrer Kleinheit vernachlässigen. Von D bis B ist dann $h_1 - z$ die wirksame Druckhöhe, welche zur Überwindung der Röhrenreibung und der Gefässreibung (s. S. 289) dient, daher

$$2)\qquad h_1 - z = \frac{w_1{}^2}{2g}\left(\zeta_0 + \lambda \frac{l_1}{d_1}\right);$$

ebenso ergiebt sich für die Zweigleitung von D bis C:

$$3)\qquad h_2 - z = \frac{w_2{}^2}{2g}\left(\zeta_0 + \lambda \frac{l_2}{d_2}\right).$$

Hierzu kommen noch die Gleichungen der Wassermengen;

$$4)\qquad Q_1 + Q_2 = \frac{d^2\pi}{4}\cdot w;$$

$$5)\qquad Q_1 = \frac{d_1{}^2\pi}{4}\cdot w_1;$$

$$6)\qquad Q_2 = \frac{d_2{}^2\pi}{4}\cdot w_2.$$

In diesen sechs Gleichungen sind unbekannt: z, w, w_1, w_2, Q_1 und Q_2; die Zahl der Unbekannten ist ebenso gross, wie die Zahl der Gleichungen, die Aufgabe somit lösbar. Man kann also berechnen, wie viel Wasser nach B und C fliesst.

Soll umgekehrt die Wasserleitung erst entworfen werden, so hat man die Aufgabe, die Röhrendurchmesser d, d_1 und d_2 so zu bestimmen, dass sie nach B und C die verlangten Wassermengen Q_1 und Q_2 liefern. In den auch hier zu verwendenden Gleichungen 1—6 sind aber jetzt sieben Grössen unbekannt, nämlich z, w, d, w_1, d_1, w_2 und d_2, d. h. die Aufgabe ist unbestimmt und nur lösbar, wenn man für eine der Grössen einen Werth im Voraus annimmt, etwa $w = 1^{\text{m}}$ bis $1{,}2^{\text{m}}$. Dass die Aufgabe verschiedene Lösungen zulässt, erkennt man auch unmittelbar durch folgende Überlegung: Nehmen wir an, die Röhrenweiten $d = 0{,}3^{\text{m}}$, $d_1 = 0{,}2^{\text{m}}$, $d_2 = 0{,}1^{\text{m}}$

genügen den gestellten Bedingungen; würde man nun d vergrössern, vielleicht auf 0,4 m, so würde jetzt, wenn d_1 und d_2 unverändert blieben, nach B und C mehr Wasser fliessen als bisher; durch entsprechende Verkleinerung von d_1 und d_2 würde man aber diesen Überschuss wieder in Wegfall bringen können und erhielte somit drei andere Weiten d', d'_1 und d'_2, die ebenfalls die Aufgabe zu erfüllen vermöchten.

Für lange Röhrenleitungen kann man in Gl. 1 den Summanden 1,6, in den Gl. 2 und 3 den Summanden ζ_0 vernachlässigen und erhält statt der Gl. 1—3:

7) $$z = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g},$$

8) $$h_1 - z = \lambda \frac{l_1}{d_1} \frac{w_1^2}{2g},$$

9) $$h_2 - z = \lambda \frac{l_2}{d_2} \frac{w_2^2}{2g}.$$

Wenn man nun zur Bestimmung der Röhrenweite die Geschwindigkeit w im Hauptrohr annimmt, so ist nach Gl. 7 der Werth z ermittelt, ebenso die Weite d des Hauptrohres nach Gl. 4. Da nun auch $h_1 - z$ und $h_2 - z$ bekannt sind, so liefern Gl. 5 u. 8:

10) $$d_1 = \sqrt[5]{\frac{16 Q_1^2 \lambda l_1}{\pi^2 2g (h_1 - z)}};$$

ebenso Gl. 6 und 9:

11) $$d_2 = \sqrt[5]{\frac{16 Q_2^2 \lambda l_2}{\pi^2 2g (h_2 - z)}}.$$

Vertauscht man, wegen voraussichtlicher Niederschläge in den Röhren, in Gl. 10: Q_1 mit $^5/_4 Q_1$ und setzt $\lambda = 0{,}04$, so bekommt man übereinstimmend mit Gl. 17, S. 291

12) $$d_1 = 0{,}35 \sqrt[5]{\frac{Q_1^2 l_1}{h_1 - z}}$$

ebenso aus Gl. 11

13) $$d_2 = 0{,}35 \sqrt[5]{\frac{Q_2^2 l_2}{h_2 - z}}.$$

Beispiel: Es sei $Q_1 = 0{,}1$ cbm/s., $Q_2 = 0{,}03$ cbm/s., $l = 300$ m, $l_1 = 200$ m, $l_2 = 500$ m, $h_1 = 12$ m, $h_2 = 6$ m; ferner werde angenommen $w = 1$ m und $\lambda = 0{,}04$ (wegen etwaiger Niederschläge).

Dann wird mit $Q = \frac{5}{4}(Q_1 + Q_2)$

nach Gl. 4: $\frac{d^2\pi}{4} \cdot 1 = \frac{5}{4} \cdot 0{,}13 = 0{,}16$ und $d = 0{,}45$ m,

nach Gl. 7: $z = 0{,}04 \frac{300}{0{,}45} \frac{1}{2g} = 1{,}36$ m,

nach Gl. 12: $d_1 = 0{,}35 \sqrt[5]{\frac{0{,}1^2 \cdot 200}{10{,}64}} = 0{,}25$ m,

nach Gl. 13: $d_2 = 0{,}35 \sqrt[5]{\frac{0{,}03^2 \cdot 500}{4{,}64}} = 0{,}22$ m.

f) Widerstand in kegelförmigen Röhren.

Verengt sich ein Rohr der Länge l_1 von der (der Geschwindigkeit w entsprechenden) Weite d kegelförmig auf die Weite d_1 (Fig. 311), so gelten für die Weite y in einem Abstand x von der weiteren Öffnung, die Beziehungen:

1) $$d - y = \frac{d - d_1}{l_1} x \quad \text{mit} \quad - dy = \frac{d - d_1}{l_1} dx, \quad \text{und}$$

2) $$w_x = w \frac{d^2}{y^2}.$$

Auf ein Längentheilchen dx kommt nach Gl. 5, S. 288 die Widerstandshöhe

$$dz = \lambda \frac{dx}{y} \frac{w_x^2}{2g} = \lambda\, dx \frac{w^2}{2g} \frac{d^4}{y^5}$$
$$= - \frac{\lambda l_1}{d - d_1} \frac{w^2}{2g} d^4 y^{-5} dy,$$

Fig. 311.

daher auf die ganze Länge

$$z = - \frac{\lambda l_1}{d - d_1} \frac{w^2}{2g} d^4 \int_d^{d_1} y^{-5} dy$$
$$= \frac{\lambda l_1}{d - d_1} \frac{w^2}{2g} \frac{d^4}{4} \left(\frac{1}{d_1^4} - \frac{1}{d^4} \right) \quad \text{oder}$$

3) $$z = \lambda \frac{w^2}{2g} \frac{l_1}{d} \left(\frac{1}{4} \frac{\frac{d^4}{d_1^4} - 1}{1 - \frac{d_1}{d}} \right).$$

Der letzte Klammernausdruck giebt an, in welchem Verhältnisse der Widerstand sich vergrössert im Vergleiche mit einem cylindrischen Rohre von der Weite d und der Länge l_1.

4) $$\left(\frac{1}{4}\frac{\frac{d^4}{d_1^4}-1}{1-\frac{d_1}{d}}\right)\cdot l_1 = l$$

heisst die ideelle (vergrösserte) Länge des Mundstücks für den Rohrdurchmesser d.

Beispiel: Es wird für $\frac{d_1}{d}=\frac{1}{2}$: $z=\lambda\frac{w^2}{2g}7{,}5\frac{l_1}{d}$ und $l=7{,}5\,l_1$,

für $\frac{d_1}{d}=\frac{1}{5}$: $z=\lambda\frac{w^2}{2g}195\frac{l_1}{d}$ und $l=195\,l_1$.

g) Steighöhe springender Strahlen.

Ein Strahl, der mit der Geschwindigkeit w_2 aus einer Mündung lothrecht emporsteigt (Fig. 312), würde im luftleeren Raum eine Höhe $h_s = \frac{w_2^2}{2g}$ erreichen. In Folge des Luftwiderstandes vermindert sich die erreichbare Höhe auf

1) $$h_s = \eta\frac{w_2^2}{2g}.$$

Die Ziffer η hängt theils von der Form des Mundstücks ab, weil diese Einfluss darauf hat, ob der Strahl gut geschlossen bleibt oder sich zertheilt; theils ist η auch noch von w_2^2 abhängig.

Es soll hier auf das Verhalten der springenden Strahlen nicht näher eingegangen, sondern nur angeführt werden, dass man als rohe Annäherung an Versuche von Weisbach

2) $$\eta = 1 - 0{,}01\frac{w_2^2}{2g}$$ setzen kann.

Beispiel: Von einem Behälter (Fig. 312) führe ein Rohr von 20 m Länge und 0,02 m Weite zu einem lothrechten kegelförmigen Mundstücke von 0,15 m Länge und 0,01 m Weite; es soll die Steighöhe des Springstrahls berechnet werden. Die wirksame Druckhöhe sei 8 m.

Nach Gl. 10 u. Gl. 11, S. 290 wird, mit $w_0 = 0$ und sinngemäfser Fortlassung der beiden letzten Glieder, wenn in l zugleich die ideelle (ver-

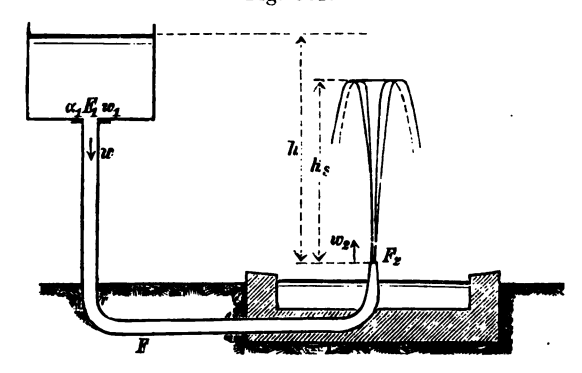
grösserte) Länge des Mundstücks (s. Gl. 4, S. 299) enthalten ist, die Geschwindigkeit in der Hauptröhre

$$w = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{F^2}{F_2^2} + \zeta_0 \frac{1}{\alpha_1^2} + \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 + \lambda \frac{l}{d}}},$$

und die Geschwindigkeit des Springstrahls (mit $\zeta_0 = 0{,}035$, $\alpha_1 = 0{,}64$, $\lambda = 0{,}03$)

$$w_2 = \frac{F}{F_2} w = \frac{F}{F_2} \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{F}{F_2}\right)^2 + 0{,}21 + 0{,}32 + 0{,}30 \frac{l}{d}}}.$$

Fig. 312.



Da der Durchmesser des Mundstücks $d_2 = 0{,}01$ m ist, wird für $d_2 = 0{,}5\,d$, nach S. 299:

$$l = 20 + 7{,}5 \cdot 0{,}15 = 21{,}125 \text{ m}$$

also:

$$w_2 = 4 \sqrt{\frac{2g \cdot 8}{16 + 0{,}53 + 0{,}03 \cdot 1056}} = 7{,}2 \text{ m}.$$

Dann ist $\frac{w_2^2}{2g} = 2{,}64$ m und $\eta = 1 - 0{,}026 = 0{,}974$,

somit die Steighöhe $h_s = 0{,}974 \cdot 2{,}64 = 2{,}57$ m.

Der sekundliche Wasserverbrauch ist

$$Q = 0{,}01^2 \frac{\pi}{4} \cdot 7{,}2 = 0{,}000565 \frac{\text{cbm}}{\text{s.}} = 0{,}565 \frac{1}{\text{s.}}.$$

Verengt sich aber das Mundstück auf $d_2 = 0{,}2\,d = 4$ mm, so wird nach S. 299:

$$l = 20 + 195 \cdot 0{,}15 = 49 \text{ m};$$

also:

$$w_2 = 25 \sqrt{\frac{2g \cdot 8}{625 + 0{,}53 + 0{,}03 \cdot 2450}} = 11{,}84 \text{ m},$$

$$\frac{w_2^2}{2g} = 7{,}1 \text{ m} \quad \text{und} \quad \eta = 1 - 0{,}071 = 0{,}93,$$

somit die Steighöhe $h_s = 0{,}93 \cdot 7{,}1 = 6{,}6$ m,

und der sekundliche Wasserverbrauch

$$Q = 0{,}004^2 \frac{\pi}{4} \cdot 11{,}84 = 0{,}0001487 \frac{\text{cbm}}{\text{s.}} = 0{,}1487 \frac{\text{l}}{\text{s.}}.$$

Die stärkere Verengung des Mundstücks hat also die Sprunghöhe erheblich vergrössert, den Wasserverbrauch aber bedeutend vermindert.

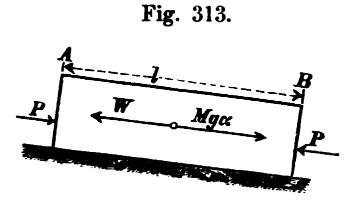
3. Bewegung des Wassers in Kanälen und Flüssen

a) Gleichförmige Bewegung des Wassers in Kanälen.

Soll die in einem offenen Kanal im Beharrungszustande befindliche Wasserbewegung gleichförmig, also die Geschwindigkeit w in allen Querschnitten die gleiche sein, so muss auch die Sohle des Kanals überall dieselbe Neigung α und der vom Wasser erfüllte Querschnitt F überall dieselbe Grösse und Form haben. Bei überall gleicher Querschnittsform des Kanalbettes giebt sich also die gleichförmige Wasserbewegung durch eine überall gleiche Wassertiefe t im Längenschnitte zu erkennen.

In einer ganz von Wasser erfüllten Röhre ist die Gleichförmigkeit oder Ungleichförmigkeit der Bewegung allein dadurch bedingt, ob der Röhrenquerschnitt überall gleich ist oder nicht; ein oben offenes Kanalbett kann aber vom Wasser auf verschiedene Höhe erfüllt werden, so dass dessen Bewegung nur unter bestimmten Bedingungen gleichförmig erfolgen wird.

Fig. 313.



Nehmen wir den Widerstand W, den das Wasser bei seiner Fortbewegung in einem offenen Kanal zu überwinden hat, einstweilen wieder, wie bei den Röhren, proportional mit der Berührungsfläche und mit der Geschwindigkeitshöhe an, so ergiebt sich, wenn man (Fig. 313) einen Wasserkörper vom Querschnitt F und der Länge l betrachtet, und u der benetzte Umfang des Querschnitts ist, in Übereinstimmung mit Gl. 1, S. 287: $W = \varkappa u l \frac{w^2}{2g}$.

Wenn wegen der Kleinheit des Neigungswinkels α dessen Sinus gleich dem Bogen gesetzt werden kann, ist die Seitenkraft der Schwere: $Mg\alpha$.

Da nun die Druckkräfte P an den beiden Querschnitten A und B sich offenbar aufheben, so muss bei gleichförmiger Bewegung:

1) $$Mg\alpha = W,$$

oder $$\gamma F l \alpha = \varkappa u l \frac{w^2}{2g} \text{ sein.}$$

Setzt man, wie auf S. 287, $\varkappa = \gamma\beta$, so wird

2) $$\alpha = \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}$$

mit β als Widerstandsziffer der Wasserbewegung in Kanälen. Wegen der massgebenden Bedeutung des Quotienten $F:u$ hat man diesen besonders bezeichnet, und nennt

3) $$\frac{F}{u} = r$$

die mittlere hydraulische Tiefe oder den hydraulischen Radius. Hiermit wird das für gleichmässige Bewegung nöthige Gefällverhältnis

4) $$\alpha = \frac{\beta}{r} \frac{w^2}{2g},$$

oder die dem Gefälle α entsprechende Geschwindigkeit

$$w = \sqrt{\frac{2gr\alpha}{\beta}}.$$

Man pflegt gewöhnlich

5) $$\sqrt{\frac{2g}{\beta}} = k$$

zu setzen, und schreibt demgemäss

6) $$w = k\sqrt{r\alpha}.$$

Ebenso wie bei der Bewegung des Wassers in Röhren ist auch hier die Annahme für W nicht genau zutreffend und deshalb auch β und das daraus folgende k keine völlig konstante oder etwa nur von der Regelmässigkeit des Bettes abhängige Grösse.

Bei der Berechnung von Röhrenweiten hat die Veränderlichkeit von $\lambda = 4\beta$ keine sehr grosse Wichtigkeit. Man muss sich nur hüten, die Widerstände zu unterschätzen, während eine Überschätzung zwar eine etwas reichlichere Rohrweite liefert, die aber zumeist keine erheblichen Mehrkosten verursacht und die Leistungs-

fähigkeit der Leitung für eine um so längere Zeit sichert. Zudem hat man in einer Röhrenleitung das Wasser mittels der Abstellvorrichtungen stets in der Gewalt, in einem oben offenen Kanal oder Fluss aber nicht.

Ist bei einem Kanal oder Flusse das Gefällverhältnis α zu gross, so entsteht eine Geschwindigkeit, die grösser ist, als beabsichtigt oder erwartet war, in Folge dessen kann möglicherweise das Kanal- oder Flussbett beschädigt und auch die Wassertiefe vielleicht für etwaige Schifffahrt oder für Rücksichten der Landwirthschaft zu klein werden, während der entgegengesetzte Fall eine Überschwemmung herbeiführen kann. Da man das Wasser in Kanälen und Flüssen nur durch die Mittel der Wissenschaft beherrschen kann, hat man sich seit etwa 150 Jahren mit Aufwendung grosser Kosten bemüht, für die Ziffer k befriedigende Gesetze aufzufinden.

Der ostfriesische Baubeamte Brahms erkannte zuerst 1753, wie es möglich sei, dass das Wasser beim Abwärtsfliessen eine gleichförmige Bewegung ausführen könne, und gelangte zu der Gl. 6, indem er den Widerstand mit w^2 verhältnisgleich setzte. Zu demselben Ergebnisse kam 1775 der franz. Ingenieur Chézy. Eytelwein (geb. 1764, gest. 1848), der 21 Jahre an der Spitze des preussischen Bauwesens stand, bestimmte für die Ziffer k einen Zahlenwerth, der, in Metermafs umgerechnet, auf

$$k = 50$$

abgerundet werden kann.

Mit bedeutenden Mitteln wurden dann 1850—60 in Nordamerika unter Leitung der Ingenieure Humphreys und Abbot umfassende Messungen im Mississippi und seinen Nebenflüssen angestellt. Diese Flüsse verursachten nämlich fast alljährlich verheerende Überschwemmungen, und zur Verbesserung der Wasserläufe bedurfte man vor Allem der Kenntnis der Bewegungsgesetze. Die von den amerikanischen Ingenieuren aufgestellte Formel ist sehr verwickelt, sie lautet, auf Metermafs bezogen:

$$7)\qquad w = \left\{ \sqrt{0{,}0025\,m + \sqrt{68{,}72\,r_1\sqrt{\alpha}}} - 0{,}05\sqrt{m} \right\}^2$$

$$\text{mit}\quad m = \frac{0{,}933}{\sqrt{r} + 0{,}457} \quad \text{und} \quad r_1 = \frac{F}{u + b},$$

wenn b die Breite des Wasserspiegels bedeutet. Humphreys und Abbot glaubten nämlich auch einen verzögernden Einfluss der über dem Wasserspiegel befindlichen Luft annehmen zu sollen, weshalb in der Hülfsgrösse r_1 der Gesammtumfang $u + b$ vorkommt.

Sehr umfassende Versuche wurden auch im Auftrage der französischen Regierung in den Jahren 1856—64 unter der Leitung von Darcy und nach dessem Tode von Bazin angestellt. Diese Versuche erstreckten sich auf Gerinne, Kanäle und Flüsse der verschiedensten Art. Bazin fasste die Ergebnisse in die Formel zusammen:

8) $$w = \sqrt{\frac{r a}{m + \frac{n}{r}}},$$

oder, wenn man die Grundform der Gl. 6 beibehält, also $w = k\sqrt{r a}$ setzt:

9) $$k = \frac{1}{\sqrt{m + \frac{n}{r}}}$$

und wegen Gl. 5 die Widerstandsziffer

10) $$\beta = \frac{2g}{k^2} = 2g\left(m + \frac{n}{r}\right).$$

Hierin ist (übereinstimmend mit Gl. 7, S. 288) die Abhängigkeit der Ziffer k bezw. β von der hydraulischen Tiefe r dargestellt, während m und n Zahlen bedeuten, die von der Beschaffenheit der Kanalwände, bezw. des Flussbettes abhängen. Es gelten:

1. für gehobeltes Holz oder Cement:

$$m = 0{,}000\,15;\ n = 0{,}000\,004\,5;$$

2. für ungehobeltes Holz, Quadern oder Ziegeln:

$$m = 0{,}000\,19;\ n = 0{,}000\,013\,3;$$

3. für Bruchsteinmauerwerk:

$$m = 0{,}000\,24;\ n = 0{,}000\,06;$$

4. für Erde:

$$m = 0{,}000\,28;\ n = 0{,}000\,35;$$

5. für gröberes Geschiebe:

$$m = 0{,}000\,40;\ n = 0{,}000\,70.$$

Diese Formeln sagen aus, der Widerstand sei wohl mit dem Quadrate der Geschwindigkeit verhältnisgleich, nicht aber einfach mit der Grösse der Berührungsfläche, sondern stehe zu dieser in einer verwickelteren Beziehung.

Die Formeln von Humphreys und Abbot und die von Bazin ergänzen sich und schliessen sich auch gegenseitig aus. Erstere ist aus den Messungen an grossen Strömen gewonnen, in denen sich das Wasser trotz des geringen Gefälles α, wegen der grossen Tiefe r, mit grosser Geschwindigkeit bewegt und passt auch nur für solche, während dagegen Bazin's Formel sich auf kleinere Gewässer ($r < 6^{\mathrm{m}}$) mit stärkerem Gefälle bezieht.

Im Jahre 1869 haben sich nun die schweizerischen Ingenieure Ganguillet und Kutter der Aufgabe unterzogen, die Ergebnisse der Geschwindigkeits-Messungen in Nordamerika und in Frankreich in eine einzige Formel von allgemeinerer Gültigkeit zusammenzufassen. Darnach ist, wenn man die Form $w = k\sqrt{r\alpha}$ beibehält,

11) $$k = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0{,}00155}{\alpha}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}00155}{\alpha}\right)\frac{n}{\sqrt{r}}}.$$

Hierin ist die Abhängigkeit der Ziffer k vom Gefälle α, von der hydraulischen Tiefe r und von der Rauhigkeit n des Bettes dargestellt; man hat zu setzen:

1. für gehobeltes Holz oder Cement: $n = 0{,}010$;
2. für ungehobeltes Holz: $n = 0{,}012$;
3. für Quadern oder Ziegeln: $n = 0{,}013$;
4. für Bruchsteine: $n = 0{,}017$;
5. für Erde: $n = 0{,}025$;
6. für gröberes Geschiebe oder Wasserpflanzen: $n = 0{,}030$.

Bei den meisten einschlägigen Aufgaben des Wasserbaues handelt es sich (besonders in Deutschland) um kleinere und mittlere

Wasserläufe, d. h. um Fälle des Anwendungsgebietes der Bazin'schen Formel, welche zumeist auch wegen ihrer einfacheren Gestalt bevorzugt wird.

Die Bazin'sche Formel ergiebt für Kanäle und Flüsse in Erde für verschiedene Grössen r, die Werthe k und $\beta = 2g:k^2$, wie folgende Tabelle zeigt:

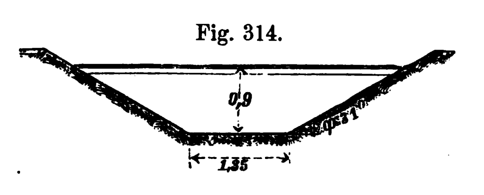
Werthe k und β nach der Bazin'schen Formel für Kanäle und Flüsse in Erde.

r	k	β
0,1	16,3	0,0742
0,2	22,2	0,0397
0,3	26,3	0,0284
0,4	29,4	0,0226
0,5	31,9	0,0192
0,6	34,0	0,0169
0,7	35,8	0,0153
0,8	37,3	0,0141
0,9	38,7	0,0131
1,0	39,8	0,0124
1,1	40,9	0,0117
1,2	41,8	0,0112
1,3	42,7	0,0108
1,4	43,4	0,0104
1,5	44,1	0,0101
1,6	44,8	0,0098
1,7	45,4	0,0095
1,8	45,9	0,0093
1,9	46,4	0,0091
2,0	46,9	0,0089
2,5	48,8	0,0082
3,0	50,2	0,0078
4,0	52,2	0,0072
5,0	53,5	0,0069
6,0	54,4	0,0066

Beispiel 1: Ein Graben in Erde vom Querschnitte nach Fig. 314 hat ein Gefällverhältnis $\alpha = 0{,}000441$. Bei dem Böschungswinkel $\varphi = 31^0$ ist $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}6$, $\sec\varphi = 1{,}17$, $\sin\varphi = 0{,}515$, $\operatorname{cosec}\varphi = 1{,}942$. Dann ist die mittlere Breite

$$= 1{,}35 + \frac{0{,}9}{0{,}6} = 2{,}85\ \mathrm{m},$$

Fig. 314.



der Querschnitt

$$F = 2{,}85 \cdot 0{,}9 = 2{,}565\ \mathrm{qm},$$

der benetzte Umfang $u = 1{,}35 + 2 \cdot 0{,}9 \cdot \operatorname{cosec}\varphi = 4{,}85\ \mathrm{m}$, daher $r = 2{,}565 : 4{,}85 = 0{,}529\ \mathrm{m}$.

Nach Messungs-Ergebnissen war die mittlere Geschwindigkeit $w = 0{,}467\ \mathrm{m}$. Es sollen damit die Ergebnisse der vorstehenden Formeln verglichen werden. Es ist

$$\sqrt{r\alpha} = \sqrt{0{,}529 \cdot 0{,}000441} = 0{,}01527.$$

Nach Eytelwein wäre

$$k = 50 \quad \text{und} \quad w = 0{,}763\ \mathrm{m}.$$

Nach Humphreys und Abbot wäre

$$m = \frac{0{,}933}{\sqrt{0{,}529 + 0{,}457}} = 0{,}94; \quad r_1 = \frac{2{,}565}{4{,}85 + 4{,}35} = 0{,}279 \quad \text{und} \quad w = 0{,}563\ \mathrm{m}.$$

Nach Bazin wäre

$$k = \frac{1}{\sqrt{0{,}00028 + \dfrac{0{,}00035}{0{,}528}}} = 32{,}57 \quad \text{und} \quad w = 0{,}497\ \mathrm{m}.$$

Nach Ganguillet und Kutter wäre

$$k = \frac{23 + 40 + \dfrac{0{,}00155}{0{,}000441}}{1 + \left(23 + \dfrac{0{,}00155}{0{,}000441}\right)\dfrac{0{,}025}{\sqrt{0{,}529}}} = 34{,}80 \quad \text{und} \quad w = 0{,}531\ \mathrm{m}.$$

Hiernach schliesst sich die Bazin'sche Formel dem Ergebnisse der Messung am besten an, dann folgen die schweizerische und die amerikanische Formel schon mit grossen Abweichungen, während die Eytelwein'sche Formel einen viel zu grossen Werth ergiebt.

Beispiel 2: Die Elbe hatte bei Altengamm oberhalb Hamburg bei Hochwasser im März 1881 eine Wasserspiegelbreite $b = 587{,}4\ \mathrm{m}$, einen benetzten Umfang $u = 591{,}4\ \mathrm{m}$, einen Flächeninhalt $F = 3132{,}7\ \mathrm{qm}$, mithin $r = 5{,}297\ \mathrm{m}$. Das Gefällverhältnis betrug $\alpha = 0{,}000152$. Die mittlere Geschwindigkeit wurde zu $w = 1{,}17\ \mathrm{m}$ gemessen. Es ist

$$\sqrt{r\alpha} = \sqrt{5{,}297 \cdot 0{,}000152} = 0{,}02838.$$

Nach Eytelwein wäre

$$k = 50 \quad \text{und} \quad w = 1{,}42\,\text{m}.$$

Nach Humphreys und Abbot wäre

$$m = \frac{0{,}933}{\sqrt{5{,}297} + 0{,}457} = 0{,}389; \quad r_1 = \frac{3132{,}7}{591{,}4 + 587{,}4} = 2{,}658\,\text{m} \quad \text{und} \quad w = 1{,}42\,\text{m}.$$

Nach Bazin wäre

a) für $m = 0{,}000\,28$ und $n = 0{,}000\,35$:

$$k = \frac{1}{\sqrt{0{,}000\,28 + \frac{0{,}000\,35}{5{,}297}}} = 53{,}8 \quad \text{und} \quad w = 1{,}53\,\text{m};$$

b) für $m = 0{,}000\,40$ und $n = 0{,}000\,70$:

$$k = \frac{1}{\sqrt{0{,}000\,40 + \frac{0{,}000\,70}{5{,}297}}} = 43{,}3 \quad \text{und} \quad w = 1{,}23\,\text{m}.$$

Nach Ganguillet und Kutter wäre

a) für $n = 0{,}025$:

$$k = \frac{23 + 40 + \frac{0{,}001\,55}{0{,}000\,152}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}001\,55}{0{,}000\,152}\right)\frac{0{,}025}{\sqrt{5{,}297}}} = 53{,}8 \quad \text{und} \quad w = 1{,}53\,\text{m};$$

b) für $n = 0{,}030$:

$$k = \frac{23 + 33{,}3 + \frac{0{,}001\,55}{0{,}000\,152}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}001\,55}{0{,}000\,152}\right)\frac{0{,}030}{\sqrt{5{,}297}}} = 46{,}4 \quad \text{und} \quad w = 1{,}32\,\text{m}.$$

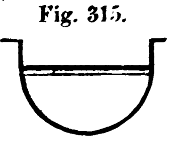
Auch in diesem Falle liefern die Formeln sämmtlich zu grosse Ergebnisse; am besten schliesst sich der Messung wieder die Bazin'sche Formel mit den Werthen unter b) an, während die Werthe unter a) mit denen der schweizerischen Formel gleiche Ergebnisse zeigen.

In beiden Beispielen stimmen die Ergebnisse der Messung mit denen der Formeln, selbst der am besten passenden, nicht befriedigend überein. — Es hat eben jeder Kanal, jeder Bach, jeder Theil eines Flusses seine besondere Eigenthümlichkeit, seinen besonderen Rauhigkeitsgrad, d. h. seine besonderen Ziffern m und n (nach Bazin) bezw. n (nach Ganguillet und Kutter), die der Wasserbautechniker, der sich mit dem Gewässer zu beschäftigen hat, entweder durch Messungen feststellen oder nach dem Augenschein auf Grund genauerer Kenntnis anderer Wasserläufe zunächst abschätzen muss.

Die Eigenthümlichkeiten eines Flusses lassen sich nicht in allgemeine Formeln mit feststehenden Widerstandsziffern zwängen. Auch ist zu bedenken, dass Unregelmässigkeiten in der Bewegung des Wassers, Wirbel u. dgl. häufig die Messung erschweren und ihre Richtigkeit beeinträchtigen, so dass zuweilen auch deren Ergebnisse von der Wirklichkeit nicht unerheblich abweichen können. Schliesslich aber muss betont werden, dass die vorstehenden Formeln sich nur auf eine dem Beharrungszustande entsprechende, **gleichförmige** Bewegung beziehen, d. h. an die Bedingung geknüpft sind, dass sich das Gefälle des Flusses und der vom Wasser eingenommene Querschnitt in Form und Grösse auf eine gewisse Länge des Flusses nicht erheblich ändern. Diese Bedingung wird sehr häufig nicht erfüllt sein, und manche Abweichung zwischen Messung und Formel wird man auf diesen Umstand zurückzuführen haben. Die Behandlung der dann vorhandenen ungleichförmigen Bewegung erfolgt weiter unten. — Besteht kein Beharrungszustand, ist also die sekundliche Wassermenge Q eines Querschnitts veränderlich, so treten besondere Erschwerungen für die Berechnung ein, welche hier nicht erörtert werden können.

b) Querschnittsform kleinsten Widerstandes.

Hat ein Kanal den Zweck, einer Wasserkraftmaschine (Wasserrad oder Turbine) das Betriebswasser zuzuführen, so kommt es darauf an, von dem ganzen zur Verfügung stehenden Gefälle für den Zuleitungskanal möglichst wenig zu verbrauchen, damit für die Kraftmaschine möglichst viel Gefälle übrig bleibe. Da nun nach Gl. 4, S. 302 das erforderliche Gefällverhältnis mit $r = F:u$ umgekehrt proportional ist, so wird diejenige Form des vom Wasser erfüllten Kanalquerschnitts am günstigsten sein, bei welcher r möglichst gross, d. h. bei gegebener Querschnittsfläche F der vom Wasser benetzte Umfang u möglichst klein ist.


Fig. 315.

Da von allen Figuren gegebenen Flächeninhalts, der Kreis den geringsten Gesammtumfang hat, so wird, weil bei einem Kanale nur der vom Wasser benetzte Umfang in Frage kommt, der Halbkreis die Kanalform kleinsten Widerstandes sein (Fig. 315), welche annähernd für den unteren Theil des Querschnitts gemauerter Entwässerungskanäle auch Anwendung findet.

Für rechteckige Querschnitte liefert das halbe Quadrat (Fig. 316) den kleinsten Widerstand, da das ganze Quadrat von allen Rechtecken gegebener Fläche, den kleinsten Umfang hat.

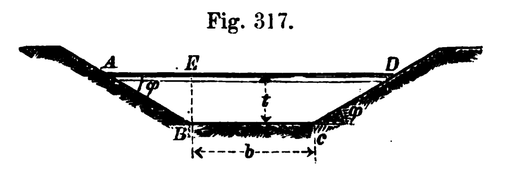
Fig. 316.

t

$b = 2t$

Für Kanäle in Erde ist der Böschungswinkel φ der Seitenwände durch die Beschaffenheit des Erdreichs bedingt; Sohlenbreite b und Wassertiefe t (Fig. 317) sind so zu wählen, dass bei gegebener Fläche F der benetzte Umfang u möglichst klein werde. Da nun $AE = t \cdot \cot\varphi$ ist, so ist die mittlere Breite $= b + t \cdot \cot\varphi$, daher

Fig. 317.



1) $$F = t(b + t\cot\varphi)$$

und, weil $AB = t : \sin\varphi$ ist, der benetzte Umfang

2) $$u = b + \frac{2t}{\sin\varphi}.$$

Durch Gl. 1 ist die Sohlenbreite bedingt zu

$$b = \frac{F}{t} - t\cot\varphi; \text{ hiermit wird}$$

3) $$u = \frac{F}{t} - t\cot\varphi + \frac{2t}{\sin\varphi} = \frac{F}{t} + t\frac{2 - \cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Damit nun u als $f(t)$ ein Minimum werde, muss

4) $$\frac{du}{dt} = -\frac{F}{t^2} + \frac{2 - \cos\varphi}{\sin\varphi} = 0, \text{ d. h.}$$

5) $$t = \sqrt{\frac{F\sin\varphi}{2 - \cos\varphi}}$$

sein. Dass dieser Werth, u zu einem Minimum und nicht zu einem Maximum macht, ist unmittelbar daraus ersichtlich, dass für $t = 0$ der Umfang u nach Gl. 3 unendlich gross wird.

Ein einfaches Verhältnis zwischen Sohlenbreite b und Wassertiefe t ergiebt sich, wenn man aus Gl. 1 bildet

$$\frac{F}{t^2} = \frac{b}{t} + \cot\varphi$$

und diesen Werth in Gl. 4 einsetzt; dann wird

$$\frac{b}{t} + \cot \varphi = \frac{2 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \quad \text{oder}$$

$$\frac{b}{t} = 2 \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = 2 \frac{2 \sin^2(1/2\, \varphi)}{2 \sin 1/2\, \varphi \cdot \cos 1/2\, \varphi}, \quad \text{d. h.}$$

6) $$\frac{b}{t} = 2 \operatorname{tg} (1/2\, \varphi).$$

Diese Gleichung bedeutet, dass der vom Wasser erfüllte Querschnitt ein, einem Halbkreise vom Halbmesser t umschriebenes Trapez sein muss. Denn bei einem solchen (Fig. 318) ist

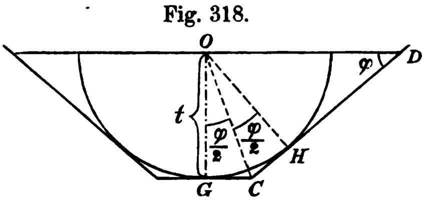


Fig. 318.

$$\sphericalangle GOH = \varphi,$$

$$\sphericalangle GOC = 1/2\, \varphi, \quad \text{d. h.}$$

$$\frac{1/2\, b}{t} = \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

übereinstimmend mit Gl. 6.

Für $\varphi = 90^0$ entsteht wieder das halbe Quadrat (Fig. 316).

Die Rechnung führt also darauf, dass man sich der überhaupt günstigsten Halbkreisform so weit zu nähern habe, wie die vorhandenen Bedingungen es zulassen.

Nach Fig. 318 ist ferner:

$$F = 2 \cdot (\triangle GOC + \triangle COD) = t \cdot (GC + CD), \quad \text{d. h.}$$

7) $$F = t \cdot \frac{u}{2}.$$

Also ist bei der günstigsten Kanalform die mittlere hydraulische Tiefe

8) $$r = \frac{F}{u} = \frac{t}{2}$$

unabhängig von φ.

Somit wird nach der Bazin'schen Formel

9) $$w = \sqrt{\frac{1/2\, t\, \alpha}{m + \frac{2n}{t}}} = \frac{t}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{1/2\, t m + n}}$$

oder das erforderliche Gefällverhältnis

10) $$\alpha = w^2 \left(\frac{2m}{t} + \frac{4n}{t^2}\right) = w^2 \left(\frac{m}{r} + \frac{n}{r^2}\right).$$

Beispiel: Ein Zuleitungskanal soll sekundlich $Q = 2$ cbm Wasser liefern; die Geschwindigkeit werde, damit einerseits keine Beschädigung der Kanalwände, andererseits keine Absetzung von Sinkstoffen erfolge, zu $w = 0{,}5$ m gewählt, so dass $F = 4$ qm werden muss. Es soll hiernach die Querschnittsform kleinsten Widerstandes bestimmt werden, unter Annahme eines Böschungswinkels $\varphi = 30^\circ$.

Gl. 6 bestimmt $\frac{b}{t} = 2 \cdot \mathrm{tg}\, 15^\circ = 0{,}536$.

Nach Gl. 5 wird $t = \sqrt{\frac{4 \cdot \sin 30^\circ}{2 - \cos 30^\circ}} = 1{,}33$ m,

also $b = 0{,}536 \cdot 1{,}33 = 0{,}71$ m.

Nach Gl. 8 ist dann $r = 0{,}665$ und nach Gl. 10 das erforderliche Gefällverhältnis

$$\alpha = 0{,}25 \left(\frac{0{,}000\,28}{0{,}665} + \frac{0{,}000\,35}{0{,}665^2}\right) = 0{,}001\,212 = 1 : 825.$$

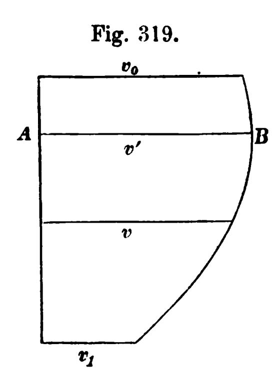
Grosser Werth ist dieser Rechnung nicht beizulegen, da in Wirklichkeit auch die ebenfalls von Breite und Tiefe abhängigen Kosten des Kanals mit in Frage kommen.

c) Geschwindigkeiten in den verschiedenen Punkten eines Querschnitts.

Im Vorstehenden wurde die Bewegung des Wassers in einem Kanale oder Flusse so aufgefasst, als ob die Wassermasse wie ein starrer prismatischer Körper abwärts glitte, als ob alle Theile dieses Körpers die gleiche Geschwindigkeit w hätten. — In Wirklichkeit ist dies nicht der Fall, vielmehr ist die Geschwindigkeit der Wassertheilchen an verschiedenen Stellen des Querschnitts eine verschiedene. In Folge der Reibung werden die nahe den Wandungen befindlichen Wassertheilchen zurückgehalten und fliessen langsamer als die entfernteren. Im Wasserspiegel giebt sich bei Messungen ein sog. Stromstrich zu erkennen, wo die Geschwindigkeit grösser ist als zu beiden Seiten. — Auch haben die Messungen ergeben, dass selbst in jeder Lothrechten des Querschnitts die Geschwindigkeiten von Punkt zu Punkt verschieden sind. Stellt man diese durch wagerechte Ordinaten von der Lothrechten aus dar, so ergiebt sich eine Kurve, die sog. Geschwindigkeitskurve (Fig. 319). Diese ist mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit eine Parabel mit wagerechter Achse. Würde am Wasserspiegel gar kein Widerstand auftreten, so müsste die Achse AB der Parabel wohl im Wasserspiegel liegen.

Bei ruhiger Luft bietet diese aber dem Wasser einen, wenn auch geringen, Widerstand, der bewirkt, dass man die grösste Geschwindigkeit v' einer Lothrechten etwas unter Wasser findet. Stromaufwärts wehender Wind schiebt die Achse der Parabel nach unten, stromabwärts wehender Wind nach oben. Die Höhenlage der Achse ist daher schwankend. Kennt man die Geschwindigkeit v an drei verschiedenen Stellen einer Lothrechten, so ist damit die Parabel bestimmt, weil man hieraus den Parameter der Parabel, die Höhenlage ihrer Achse und den Abstand $AB = v'$ ihres Scheitels von der Lothrechten berechnen kann.

Fig. 319.



Ist dF ein Theilchen der Querschnittsfläche, v die zugehörige Geschwindigkeit, so ist $dQ = dF \cdot v$ die zugehörige sekundliche Wassermenge, dargestellt durch ein wagerechtes Prisma vom Querschnitte dF und der Länge v. — Denkt man sich zu allen Flächentheilchen die entsprechende Geschwindigkeit rechtwinklig aufgetragen, so entsteht ein Körper, dessen lothrechte in der Stromrichtung geführte Schnitte die Geschwindigkeitsflächen (Fig. 319) sind und dessen Inhalt die sekundliche Gesammtwassermenge Q darstellt. Verwandelt man diesen Körper in ein gerade abgeschnittenes Prisma vom Querschnitt F, so ist seine Länge

1) $$w = \frac{Q}{F}$$

die mittlere Geschwindigkeit des Querschnitts, auf welche sich die Erörterungen S. 301 bis 312 durchweg beziehen.

Werth kann die Beziehung zwischen der grössten Oberflächengeschwindigkeit $v_{0\,max}$ im Stromstrich und der mittleren Geschwindigkeit w des ganzen Querschnittes gewinnen, wenn es sich darum handelt, aus der alleinigen Messung von $v_{0\,max}$ die Wassermenge Q, wenn auch nur roh, zu bestimmen. Die einfachste, wenn auch sehr unverlässliche, derartige Formel ist

2) $$w = {}^3/_4\, v_{0\,max},$$

während Bazin aus seinen Versuchen abgeleitet hat

3) $$w = v_{0\,max} - 14\sqrt{ra},$$

oder, weil nach Gl. 6, S. 302, $\sqrt{ra} = w : k$ ist,

$$w = v_{0\,max} - 14\frac{w}{k}, \quad \text{oder}$$

4) $$w = \frac{v_{0\,max}}{1 + \frac{14}{k}} = v_{0\,max}\frac{k}{k+14}.$$

Für Kanäle in Erde gilt für verschiedene Werthe von r:

r (Meter)	$\frac{w}{v_{0\,mxa}} = \frac{k}{k+14}$	r (Meter)	$\frac{w}{v_{0\,max}} = \frac{k}{k+14}$
0,1	0,537	1,2	0,749
0,2	0,613	1,3	0,753
0,3	0,653	1,4	0,756
0,4	0,678	1,6	0,762
0,5	0,695	1,8	0,766
0,6	0,709	2,0	0,770
0,7	0,719	2,5	0,777
0,8	0,727	3,0	0,782
0,9	0,734	4,0	0,788
1,0	0,740	5,0	0,792
1,1	0,745	6,0	0,795

Beispiel: In dem ersten Beispiel auf S. 307 war $r = 0{,}529$, und nach Bazin $k = 32{,}57$, daher wird

$$w : v_{0\,max} = \frac{32{,}57}{32{,}57 + 14} = 0{,}699.$$

In dem zweiten Beispiele auf S. 307/8 mit $r = 5{,}297$ war nach Bazin mit den Werthen unter a): $k = 53{,}8$, daher wird

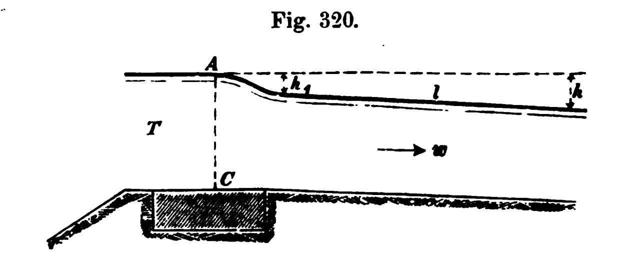
$$w : v_{0\,max} = \frac{53{,}8}{53{,}8 + 14} = 0{,}793.$$

d) Eintritt des Wassers in einen Kanal.

Soll aus einem Teiche oder sonstigen Wasserbehälter T (Fig. 320) durch einen Ufereinschnitt AC und einen anschliessenden

Kanal eine sekundliche Wassermenge Q entnommen werden und ist auf eine Länge l ein Wasserspiegel-Gefälle h verfügbar, so darf

Fig. 320.



man nicht etwa voraussetzen, dass das Wasser im Kanal eine Tiefe AC annehmen werde. Vielmehr wird ein Theil h_1 des Gefälles beim Eintritte des Wassers in den Kanal dazu verbraucht, dem Wasser, das im Teiche fast in Ruhe war, die Kanalgeschwindigkeit w zu ertheilen; es ist $h_1 = \frac{w^2}{2g}$, und erst der Rest $h - h_1$ dient zur Überwindung der Reibung im Kanal und darf, wenn durch ein gleichmässiges Kanalprofil eine gleichförmige Bewegung erzielt wird, gleichmässig auf die Länge l vertheilt werden. Da w noch unbekannt ist, so kann man die Rechnung folgendermassen durchführen: Das ganze Gefälle h zerlegt sich in $h_1 = \frac{w^2}{2g}$ und den Theil $\alpha l = \beta \frac{l}{r} \frac{w^2}{2g}$ (s. Gl. 4, S. 302); es ist also

1) $$h = \frac{w^2}{2g} + \beta \frac{l}{r} \frac{w^2}{2g} = \frac{w^2}{2g}\left(1 + \beta \frac{l}{r}\right).$$

2) $$w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \beta \cdot \frac{l}{r}}}.$$

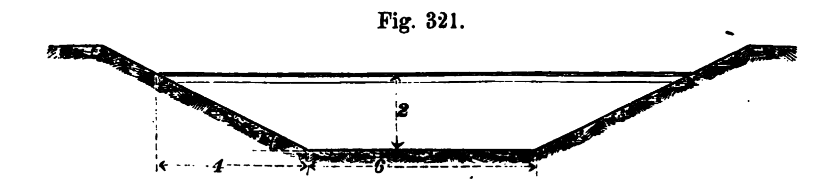
Da für gleichförmige Bewegung $\frac{w^2}{2g} = \frac{\alpha r}{\beta}$ ist, ergiebt sich auch:

$$h = \frac{\alpha r}{\beta}\left(1 + \beta \frac{l}{r}\right) = \alpha\left(\frac{r}{\beta} + l\right), \text{ und}$$

3) $$\alpha = \frac{\beta h}{r + \beta l}.$$

Beispiel: Aus einem Behälter soll mittels eines Kanales (Fig. 321) von 6 m Sohlenbreite, 2 m Tiefe und einem Böschungswinkel $\varphi = 26{,}5^0$ ($\text{tg}\,\varphi = 0{,}5$,

Fig. 321.



$\sin\varphi = 0{,}447$) Wasser entnommen werden. Auf $l = 5000$ m Länge steht ein Gefälle $h = 1$ m zur Verfügung.

Es ist $F = 2 \cdot (6 + 4) = 20$ qm, $u = 6 + 2 \cdot 2 : 0{,}447 = 14{,}95$ m, $r = 20 : 14{,}95 =$ rund $1{,}3$ m. Dann wird nach Bazin (vergl. S. 304 und 306)

$$\beta = 2g\left(0{,}000\,28 + \frac{0{,}000\,35}{1{,}3}\right) = 0{,}0103 \quad \text{und damit} \quad \alpha = \frac{0{,}0103}{1{,}3 + 54} = \frac{1}{5120}.$$

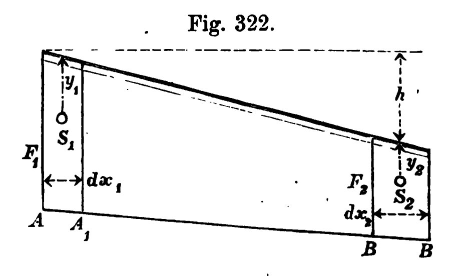
Demnach ist $\alpha \cdot l = 0{,}977$ m das auf den Kanal zu vertheilende Gefälle, während $h_1 = 0{,}023$ m zur Erzeugung der Eintrittsgeschwindigkeit $w = 0{,}68$ m/s. dient. Der Kanal wird daher sekundlich $Q = 20 \cdot 0{,}68 = 13{,}6$ cbm Wasser liefern.

e) Ungleichförmige Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen.

Das äussere Kennzeichen einer im Beharrungszustande befindlichen ungleichförmigen Wasserbewegung ist, dass sich der Wasserquerschnitt F wohl an ein und derselben Stelle nicht ändert, aber an verschiedenen Stellen eine ungleiche Grösse zeigt. Bei regelmässiger Form des Wasserlaufes wird dann an verschiedenen Stellen eines Längenschnittes die Wassertiefe t verschieden gross, also der Wasserspiegel der Kanalsohle nicht parallel sein.

Es lässt sich zeigen, dass in diesem Falle das Gefälle der **Oberfläche** das für die Arbeit der Schwere massgebende, **wirksame** Gefälle ist.

Fig. 322.



Wir betrachten die zwischen den Schnitten A und B (Fig. 322) befindliche Wassermenge, die nach einem Zeittheilchen die Lage $A_1 B_1$ einnimmt. Es möge die an diesem Wasserkörper während

der Bewegung von AB nach $A_1 B_1$ verrichtete Arbeit der Schwere und des Wasserdrucks berechnet werden. Ist der obere Querschnitt F_1, der untere F_2 und nennt man $AA_1 = dx_1$, $BB_1 = dx_2$, so muss $F_1 dx_1 = F_2 dx_2$ sein. Die Arbeit der Schwere ist offenbar so anzusehen, als ob das Massentheilchen

$$m = \frac{\gamma}{g} F_1 \, dx_1 = \frac{\gamma}{g} F_2 \, dx_2$$

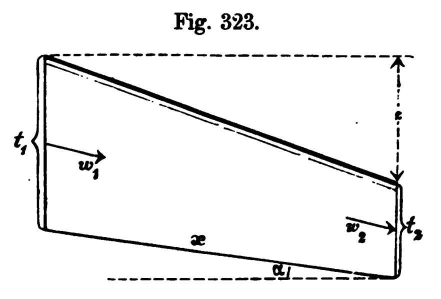
aus der oberen Lage mit dem Schwerpunkt S_1 in die untere mit dem Schwerpunkt S_2 gerückt sei; diese Arbeit ist dann

$$mg(h + y_2 - y_1).$$

Die Vertheilung des Druckes über einen Querschnitt erfolgt nahezu nach den Regeln für einen im Gleichgewichte befindlichen Wasserkörper, da der nach S. 270 zu beurtheilende vermindernde Einfluss der Beschleunigung gewöhnlich ausserordentlich unbedeutend ist. Dann treten am oberen und unteren Schnitte die Druckkräfte $\gamma F_1 y_1$ bezw. $\gamma F_2 y_2$ auf, mit den Arbeiten $\gamma F_1 y_1 dx_1$ bezw. $-\gamma F_2 y_2 dx_2$, deren Arbeitssumme wegen $mg = \gamma F_1 \, dx_1 = \gamma F_2 dx_2$ sich auch schreiben lässt:

$$mg(y_1 - y_2).$$

Fig. 323.



Addirt man diese zu obiger Arbeit der Schwerkraft, so entsteht als Ergebnis

$$mgh,$$

also eine Arbeit entsprechend dem wirksamen Gefälle h, wie oben behauptet wurde.

Bei der ungleichförmigen Bewegung zerfällt das Gefälle z (Fig. 323) in einen Theil, der zur Geschwindigkeits-Änderung w_1 in w_2 dient (s. S. 257), und in einen Theil zur Überwindung der Kanalwiderstände (s. S. 302).

Hat man daher für eine nicht sehr lange Strecke x eines Wasserlaufes das Gefälle z der Oberfläche, die Neigung α der Sohle, die Wassertiefen t_1 und t_2, oben und unten gemessen, und die diesen Wassertiefen entsprechenden Querschnittswerthe F_1, u_1

bezw. F_2, u_2 ermittelt, so ist, wenn u, F und w die veränderlichen Werthe der Kanalstrecke bedeuten,

$$z = \left(\frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g}\right) + \beta x \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}.$$

Sind nun t_1 und t_2 nicht viel von einander abweichend, so kann man in dem letzten Gliede für u, F und w die arithmetischen Mittel setzen, d. h.

$$u = 1/2\,(u_1 + u_2); \quad F = 1/2\,(F_1 + F_2); \quad w = 1/2\,(w_1 + w_2).$$

Bedenkt man noch, dass

$$Q = F_1 w_1 = F_2 w_2, \quad \text{also } w_1 = \frac{Q}{F_1}, \quad w_2 = \frac{Q}{F_2} \quad \text{ist,}$$

so wird

$$z = \frac{Q^2}{2gF_2^2} - \frac{Q^2}{2gF_1^2} + \beta x \frac{u_1 + u_2}{F_1 + F_2}\left(\frac{Q}{F_1} + \frac{Q}{F_2}\right)^2 \frac{1}{8g}$$

$$= \frac{Q^2}{2g}\left\{\frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2} + \beta x \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2)}{4F_1^2 F_2^2}\right\}.$$

Hieraus ergiebt sich die sekundliche Wassermenge

1) $$Q = \frac{\sqrt{2gz}}{\sqrt{\frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2} + \beta x \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2)}{4F_1^2 F_2^2}}}.$$

Beispiel: In einem Wasserlaufe von dem Bettquerschnitte Fig. 321, S. 316, sei an einer Stelle die Wassertiefe 2^m, an einer um 200^m stromabwärts gelegenen Stelle $1{,}95^m$; das Oberflächen-Gefälle betrage für diese Strecke $0{,}1^m$. Dann berechnet sich $u_1 = 14{,}95^m$, $F_1 = 20^{qm}$; $u_2 = 14{,}72$, $F_2 = 19{,}3^{qm}$; $r =$ im Mittel $\frac{39{,}3}{29{,}67} =$ rund $1{,}33^m$, daher $\beta = 0{,}0106$; und

$$Q = \frac{\sqrt{2g \cdot 0{,}1}}{\sqrt{\frac{1}{19{,}3^2} - \frac{1}{20^2} + 0{,}0106 \cdot 200 \cdot \frac{29{,}67 \cdot 39{,}3}{4 \cdot 20^2 \cdot 19{,}3^2}}} = 21{,}62^{\text{cbm}}.$$

Hätte man nur den oberen Querschnitt F_1 berücksichtigt und die Bewegung als eine gleichmässige mit dem Gefällverhältnis $\alpha = 0{,}1 : 200 = 0{,}0005$ angesehen, so hätte sich nach Bazin, S. 304, mit $r = 1{,}33 : k = 42{,}9$, also

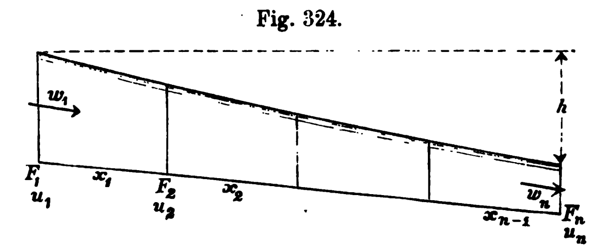
$$w = 42{,}9\sqrt{1{,}33 \cdot 0{,}0005} = 1{,}109 \quad \text{und} \quad Q = 20 \cdot 1{,}109 = 22{,}18^{\text{cbm}}$$

ergeben.

Steht eine längere Strecke des Wasserlaufes zur Verfügung, so ist es räthlich, die Strecke in mehrere Theile zu zerlegen, in jedem Theile die erforderlichen Messungen auszuführen und auf jeden Theil die Gl. 1 anzuwenden. Aus den so erhaltenen Werthen für Q nimmt man dann das arithmetische Mittel.

Ist aber das Gefälle nicht für jeden einzelnen Theil, sondern nur für die ganze eingetheilte Strecke bekannt (Fig. 324), so kann

Fig. 324.



man auch nur eine einzige Gleichung aufstellen, in welche die Summe der nach obiger Weise berechneten Widerstandshöhen der einzelnen Theile eingeführt wird; es ist dann

$$h = \left(\frac{w_n^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g}\right) + \Sigma \beta x \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}$$

$$= \frac{Q^2}{2g} \left\{ \frac{1}{F_n^2} - \frac{1}{F_1^2} + \Sigma \beta x \frac{u}{F} \frac{1}{F^2} \right\}$$

und darnach

2) $$Q = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\frac{1}{F_n^2} - \frac{1}{F_1^2} + \Sigma \beta \cdot x \frac{u}{F} \frac{1}{F^2}}};$$

darin bedeutet:

$$\Sigma \beta x \frac{u}{F} \frac{1}{F^2} = \beta_1 x_1 \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2)}{4 F_1^2 F_2^2}$$

$$+ \beta_2 x_2 \frac{(u_2 + u_3)(F_2 + F_3)}{4 F_2^2 F_3^2} + \ldots\ldots\ldots$$

f) Stauhöhe an Wehren und Brückenpfeilern.

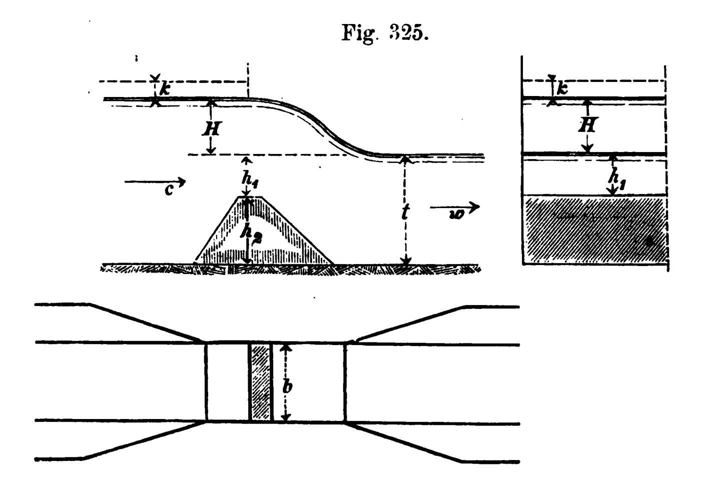
Der Zweck eines Wehres ist, die Wasseroberfläche eines Baches oder Flusses oberhalb des Wehres zu heben (anzustauen), um entweder für die Flösserei und die Schiffahrt genügende Wassertiefe

zu erhalten, oder aber das angestaute Wasser zur Bewässerung der angrenzenden Ländereien und zum Betrieb von Wasserkraftmaschinen (Wasserräder, Turbinen) zu benutzen. Es wird zumeist ein Theil Q_2 des angestauten Wassers mittels eines Betriebskanales abgeleitet, so dass dann von der ganzen sekundlichen Wassermenge Q des Flusses nur $Q_1 = Q - Q_2$ über das Wehr fliesst.

Das Wehr ist ein durch die ganze Breite des Flusses reichender und über die Flusssohle sich erhebender dammartiger Einbau. Liegt dessen Krone tiefer als die Wasseroberfläche unterhalb des Wehres, so heisst dieses ein Grundwehr, im anderen Falle ein Überfallwehr.

α) **Grundwehr.** Am Wehre sei der Durchflussquerschnitt zu einem Rechtecke von der Breite b zusammengezogen (Fig. 325). Die Wehrkrone liege um h_1 unter dem Unterwasser, dessen Tiefe

Fig. 325.



dicht unter dem Wehre t betrage, und h_2 sei die Höhe des Wehrkörpers, so dass $h_1 + h_2 = t$ ist. Das Oberwasser sei durch den Einbau des Wehres um die Stauhöhe H gehoben. Die Geschwindigkeit des ungestauten Wassers betrage w, die des gestauten Wassers oberhalb des Wehres c. — Den Einfluss der Zuflussgeschwindigkeit c auf die Durchflussmenge berücksichtigt man dadurch, dass man das Oberwasser um die Geschwindigkeitshöhe $k = \frac{c^2}{2g}$ gehoben denkt. Da die Wehrkrone beiderseitig unter Wasser liegt, so theilt man die Höhe der Durchflussöffnung in zwei Theile, nämlich H

und h_1. Für H betrachtet man den Durchfluss als einen Ausfluss ins Freie, für h_1 als einen Ausfluss unter Wasser.

Dann ist die sekundl. Durchflussmenge für den oberen Theil nach Gl. 7, S. 251:

1) $$Q_1' = \frac{2}{3}\mu_1 b \sqrt{2g}\left\{(H+k)^{3/2} - k^{3/2}\right\},$$

und für den unteren Theil, weil alle Punkte desselben unter der gemeinsamen Druckhöhe $H + k$ stehen:

2) $$Q_1'' = \mu_2 b h_1 \sqrt{2g(H+k)}.$$

Für die gesammte Durchflussmenge $Q_1 = Q_1' + Q_1''$ gilt also:

3) $$Q_1 = \frac{2}{3}\mu_1 b \sqrt{2g}\left\{(H+k)^{3/2} - k^{3/2}\right\} + \mu_2 b h_1 \sqrt{2g(H+k)}.$$

Nimmt man $^2/_3\mu_1 = 0{,}57$ und $\mu_2 = 0{,}62$ an, so wird

4) $$h_1 = \frac{Q_1}{0{,}62\, b\sqrt{2g(H+k)}} - 0{,}92\,\frac{(H+k)^{3/2} - k^{3/2}}{\sqrt{H+k}},$$

und demgemäss

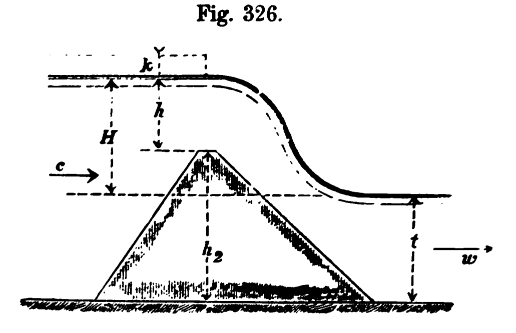
5) $$h_2 = t - h_1.$$

Diese Gleichungen sind nur gültig, so lange sie für h_1 einen Werth > 0 ergeben. Andernfalls muss die Wehrkrone sich über das Unterwasser erheben, und man bekommt ein Überfallwehr. Zur vorläufigen Untersuchung, ob das herzustellende Wehr ein Grundwehr oder ein Überfallwehr sein muss, pflegt man $h_2 = t$ also $h_1 = 0$ anzunehmen und k zu vernachlässigen; dann ergiebt sich

6) $Q_1 \gtrless 0{,}57\, b H \sqrt{2gH}$

als Bedingung für ein Grundwehr bezw. Überfallwehr.

Fig. 326.



β) **Überfallwehr** (Fig. 326). Die Wehrkrone liegt über dem Unterwasser, der Wasserabfluss erfolgt nur ins Freie. Nennt man

die Strahldicke über dem Wehre h, so ist nach Gl. 1:

7) $$Q_1 = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left\{ (h+k)^{3/2} - k^{3/2} \right\}, \quad \text{also}$$

8) $$h = \left\{ \frac{3}{2} \frac{Q_1}{\mu b \sqrt{2g}} + k^{3/2} \right\}^{2/3} - k,$$

und demgemäss

9) $$h_2 = H + t - h.$$

Beispiel: Für einen Fluss sei $w = 1$ m/s., $t = 2$ m, $F = 24$ qm, $Q = 24$ cbm. Mittels eines Wehres soll ein Aufstau um $H = 0{,}5$ m herbeigeführt werden, das Wehr soll 10 m Breite erhalten, auch sollen oberhalb des Wehres 2 cbm abgeleitet werden, so dass nur 22 cbm über das Wehr fliessen.

Die Bedingung 6 wird:

$$22 > 0{,}57 \cdot 10 \cdot 0{,}5 \sqrt{2g \cdot 0{,}5} = 8{,}92,$$

d. h. es muss ein Grundwehr erbaut werden.

Für die Geschwindigkeit c oberhalb des Wehres gilt annähernd:

$$c = \frac{1 \cdot 2}{2 + 0{,}5} \cdot \frac{22}{24} = 0{,}73 \quad \text{und damit für} \quad \frac{c^2}{2g} = k = 0{,}03 \text{ m}.$$

Dann wird nach Gl. 4:

$$h_1 = \frac{22}{0{,}62 \cdot 10 \sqrt{2g \cdot 0{,}53}} - 0{,}92 \frac{0{,}53^{3/2} - 0{,}03^{3/2}}{\sqrt{0{,}53}} = 0{,}6 \text{ m}.$$

Der Wehrkörper muss also $h_2 = t - h_1 = 1{,}4$ m Höhe erhalten.

Bei Vernachlässigung von k würde sich $h_1 = 0{,}67$ m ergeben.

Soll unter sonst gleich bleibenden Verhältnissen eine Stauhöhe $H = 2$ m erreicht werden, so wird Bedingung 6:

$$22 < 0{,}57 \cdot 10 \cdot 2 \sqrt{2g \cdot 2} = 71{,}36,$$

d. h. das Wehr wird ein Überfallwehr. Es ist nun

$$c = \frac{1 \cdot 2}{2 + 2} \cdot \frac{22}{24} = 0{,}46 \quad \text{und} \quad k = 0{,}011 \text{ m}.$$

Gl. 8 liefert:

$$h = \left\{ \frac{22}{0{,}57 \cdot 10 \cdot 4{,}43} + 0{,}011^{3/2} \right\}^{2/3} - 0{,}011 = 0{,}9 \text{ m}.$$

Die Höhe des Wehrkörpers wird dann $h_2 = 2 + 2 - 0{,}9 = 3{,}1$ m.

Bei Vernachlässigung von k würde sich

$$h = \left(\frac{22}{0{,}57 \cdot 10 \cdot 4{,}43} \right)^{2/3} = 0{,}91 \text{ m} \quad \text{ergeben.}$$

γ) Stau durch den Einbau von Brückenpfeilern. Werden in einen Fluss von der Breite B und der Tiefe t (Fig 327), welcher mit der Geschwindigkeit w die sekundliche Wassermenge

Q führt, Brückenpfeiler eingebaut, welche die Durchflussbreite auf die Grösse b einschränken, so wird dadurch ein Anstau H verursacht. Es ist die für ein Grundwehr abgeleitete Gl. 3 zu benutzen, wenn man die Höhe des Wehrkörpers gleich Null, also $h_2 = 0$, $h_1 = t$ und zugleich $Q_1 = Q$ setzt.

Dann wird

$$10)\quad Q = \frac{2}{3}\mu_1 b \sqrt{2g}\left\{(H+k)^{3/2} - k^{3/2}\right\} + \mu_2 b t \sqrt{2g(H+k)},$$

mit

$$k = \frac{c^2}{2g};\quad c = \frac{Q}{B(H+t)}.$$

Ist die zulässige Stauhöhe H gegeben, so kann man aus obiger Gleichung die erforderliche lichte Weite b berechnen, wenn man noch, wegen übereinstimmender Durchflussverhältnisse, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ setzt:

$$11)\quad b = \frac{Q}{\mu\sqrt{2g}\left\{\frac{2}{3}(H+k)^{3/2} - \frac{2}{3}k^{3/2} + t\sqrt{H+k}\right\}}.$$

Die Auflösung der Gl. 10 nach H ist umständlich. Prof. Dr. Mehmke (Stuttgart) hat in der Zeitschrift Civilingenieur 1889, S. 623, angegeben, dass, wenn man

$$\frac{Q}{B\sqrt{2g}} = \alpha,$$

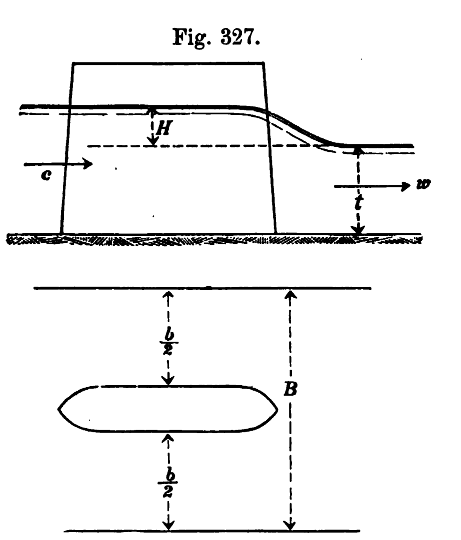
$$\frac{Q}{\mu b\sqrt{2g}} = \beta$$

setzt, die Annäherungsgleichung

$$12)\quad \frac{2}{3}H + t = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\sqrt{H}}$$

benutzt werden kann.

Fig. 327.



Für Pfeiler mit spitzen Vor- und Hinterköpfen kann $\mu = 0{,}95$, für stumpf abgeschnittene Pfeiler $\mu = 0{,}85$ angenommen werden.

Beispiel: Ein Fluss führe bei 2 m Wassertiefe und 50 m Breite 100 cbm in der Sekunde. Auf welches Mafs darf die Lichtweite eingeschränkt werden, wenn eine Stauhöhe $H = 0{,}02$ m zulässig ist?

Es ist dann die Geschwindigkeit oberhalb der Pfeiler

$$c = \frac{100}{50 \cdot 2{,}02} = 0{,}99 \text{ m} \quad \text{und} \quad k = 0{,}05 \text{ m};$$

Gl. 11 giebt:

$$b = \frac{100}{0{,}95 \cdot 4{,}43 \left\{ \frac{2}{3} 0{,}07^{3/2} - \frac{2}{3} 0{,}05^{3/2} + 2\sqrt{0{,}07} \right\}} = 44{,}5 \text{ m}.$$

Berechnet man hiernach Gl. 12 mit den Hülfsgrössen α und β, so liefert die linke Seite 2,013, die rechte Seite 2,015; der Unterschied ist also unbedeutend.

Bei **gewölbten Brücken** sind vorstehende Gl. 10, 11 und 12 nur für Wasserstände bis zur Kämpferhöhe anwendbar; bei Eintauchung der Brückengewölbe ist die Näherungsgleichung

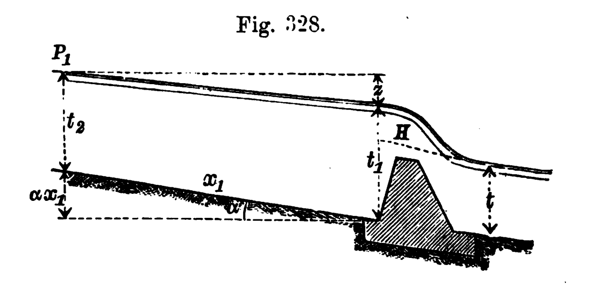
13) $$Q = \mu \cdot F \cdot \sqrt{2g(z_0 + k)}$$

sinngemäss zu benutzen (s. Gl. 2, S. 246, und das Beispiel S. 247).

g) Staukurve und Stauweite.

Will man erfahren, in welcher Weise der Stau oberhalb eines Wehres allmählich abnimmt, so benutzt man, in Voraussetzung einer regelmässigen Form des Wasserlaufes, für die hier stattfindende **verzögerte Bewegung**, den Rechnungsgang der **ungleichförmigen Bewegung** des Wassers, wie auf S. 318.

Fig. 328.



Unmittelbar oberhalb des Wehres (Fig. 328) beträgt die Tiefe

$$t_1 = t + H,$$

welcher ein Querschnitt F_1, ein benetzter Umfang u_1, eine Geschwindigkeit w_1 entspricht. Wählt man weiter aufwärts eine Tiefe t_2, welche etwas kleiner ist als t_1 und bezeichnet die ent-

sprechenden Querschnittsgrössen mit F_2 und u_2, die Geschwindigkeit mit w_2, so ist:

1) $$z = \left(\frac{w_1^2}{2g} - \frac{w_2^2}{2g}\right) + \beta_1 x_1 \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}$$

oder

2) $$z = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_2^2}\right) + \beta_1 x_1 \frac{(u_1 + u_2).(F_1 + F_2)}{4 F_1^2 F_2^2} \frac{Q^2}{2g}.$$

Ist α die Neigung der Sohle des Wasserlaufes, so muss auch

3) $$z = \alpha x_1 + t_2 - t_1 = \alpha x_1 - (t_1 - t_2) \quad \text{sein}$$

Vereinigt man diese Gleichung mit der vorstehenden und löst nach x_1 auf, so ergiebt sich

4) $$x_1 = \frac{(t_1 - t_2) - \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2}\right)}{\alpha - \beta_1 \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2) Q^2}{8 g F_1^2 F_2^2}}$$

als Abstand vom Wehre, in welchem die Wassertiefe t_2 vorhanden ist. Hierdurch liegt der Punkt P_1 der Staukurve fest.

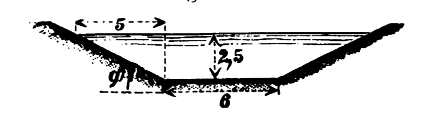
Man wählt dann wiederum weiter aufwärts eine etwas kleinere Wassertiefe t_3 und sucht den zugehörigen Abstand x_2 von der Stelle mit der Wassertiefe t_2, indem man aus Gl. 4 eine neue Gleichung bildet, deren Indices durchweg um eine Einheit grösser sind, und erhält damit einen Punkt P_2 der Staukurve. Dieses Verfahren wäre so lange fortzusetzen, bis man an die Staugrenze mit $t_n = t$ gelangt. Durch die Verbindung der einzelnen Punkte P ist die Staukurve bestimmt.

$L = x_1 + x_2 + .. + x_{n-1}$ liefert schliesslich die gesuchte Stauweite. Da diese theoretisch für $t_n = t$ im Unendlichen liegt (s. S. 328), und es in der praktischen Anwendung nur auf die Grenze der noch merkbaren Erhebung des Wasserspiegels ankommt, so begnügt man sich zumeist mit der Ermittelung der praktischen Stauweite für $t_n - t = 1^{cm}$ bis etwa 3^{cm} (s. S. 334).

Beispiel: Das Bett eines Wasserlaufes habe einen trapezförmigen Querschnitt nach Fig. 321, S. 316, mit einem Böschungswinkel $\varphi = 26{,}5^0$ ($\operatorname{tg}\varphi = 0{,}5$, $\sin\varphi = 0{,}447$). Die Neigung der 6 m breiten Sohle betrage $\alpha = 1:5000$. Bei der ursprünglich gleichmässigen Bewegung möge die Wassertiefe $t = 2^m$ gewesen sein; dem entspricht $F = 20^{qm}$, $u = 14{,}95^m$, $r = 1{,}3^m$ und nach S. 306 $\beta = 0{,}0108$, $k = 42{,}7$, daher eine Geschwindigkeit $w = 42{,}7\sqrt{\frac{1{,}3}{5000}}$

$= 0{,}69$ m und eine Wassermenge $Q = 13{,}8$ cbm. Durch ein Wehr möge eine Stauhöhe $H = 0{,}5$ m hervorgebracht sein, so dass die Wassertiefe oberhalb des Wehres 2,5 m beträgt (Fig. 329). Es soll zunächst berechnet werden, in welchem Abstand x_1 die Tiefe 2,4 m ist?

Fig. 329.



Für $t_1 = 2{,}5$ m wird $F_1 = 27{,}5$ qm, $u_1 = 17{,}20$ m.

Für $t_2 = 2{,}4$ m wird $F_2 = 25{,}92$ qm, $u_2 = 16{,}75$ m.

Für diese Strecke ist dann

$r_1 = \frac{F_1 + F_2}{u_1 + u_2} = 1{,}6$ m und $\beta_1 = 0{,}0098$. Hiernach folgt aus Gl. 4:

$$x_1 = \frac{0{,}1 - \frac{13{,}8^2}{19{,}62}\left(\frac{1}{25{,}92^2} - \frac{1}{27{,}5^2}\right)}{0{,}0002 - \frac{0{,}0098 \cdot 33{,}95 \cdot 53{,}42 \cdot 13{,}8^2}{8 \cdot 9{,}81 \cdot 27{,}5^2 \cdot 25{,}92^2}} = 854{,}7 \text{ m}.$$

Nunmehr kann ermittelt werden, in welchem Abstande x_2 weiter oberhalb die Tiefe 2,3 m beträgt?

Setzt man $t_3 = 2{,}3$ m, so wird $F_3 = 24{,}38$ qm, $u_3 = 16{,}29$ m, $r_2 = \frac{F_2 + F_3}{u_2 + u_3}$ $= 1{,}5$ und $\beta_2 = 0{,}0101$.

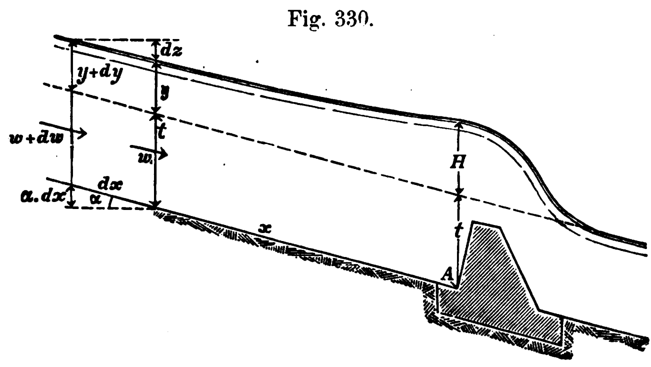
Gl. 4 ergiebt

$$x_2 = \frac{0{,}1 - \frac{13{,}8^2}{19{,}62}\left(\frac{1}{24{,}38^2} - \frac{1}{25{,}92^2}\right)}{0{,}0002 - \frac{0{,}0101 \cdot 33{,}04 \cdot 50{,}3 \cdot 13{,}8^2}{8 \cdot 9{,}81 \cdot 24{,}38^2 \cdot 25{,}92^2}} = 1001 \text{ m}.$$

In gleicher Weise bestimmt man die weiteren Punkte der Staukurve.

Gleichung der Staukurve für einen rechteckigen Kanal von grosser Breite und geringer Wassertiefe. Für diesen Fall lässt

Fig. 330.



sich die Gleichung der Staukurve folgendermassen entwickeln. Es sei b die Breite und t die Tiefe des ungestauten Wassers, also $b \cdot t = F_0$,

ferner annähernd $b = u_0$, daher $t = F_0 : b$ auch annähernd gleich $r_0 = F_0 : u_0$ (vergl. S. 302). H bedeute die Stauhöhe am Wehre bei A (Fig. 330), y die Stauhöhe und w die mittlere Geschwindigkeit im Abstand x vom Wehre; im weiteren Abstande dx sei die Stauhöhe $y + dy$ (wobei dy negativ), und die Geschwindigkeit $w + dw$. Kommt auf die Strecke dx ein Höhenunterschied dz des Wasserspiegels und ein Gefälle $\alpha \cdot dx$ der Sohle, so ist nach Gl. 1, S. 325:

$$dz = \frac{w^2}{2g} - \frac{(w + dw)^2}{2g} + \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g} dx$$
$$= -\frac{w\,dw}{g} + \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g} dx.$$

Ferner ist nach Fig. 330

$$dz = dy + \alpha \cdot dx, \quad \text{also}$$
$$dy + dx\left(\alpha - \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}\right) = -\frac{w\,dw}{g} \quad \text{oder}$$

1) $$dx = -\frac{dy + \frac{w\,dw}{g}}{\alpha - \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}}.$$

Aus dieser Gleichung kann dw entfernt werden; es ist

$$w = \frac{Q}{b(t + y)}; \quad dw = -\frac{Q\,dy}{b(t + y)^2} = -\frac{w}{t + y} \cdot dy,$$

also:
$$w\,dw = -\frac{w^2}{t + y} dy.$$

Setzt man dies in Gl. 1 ein, so entsteht

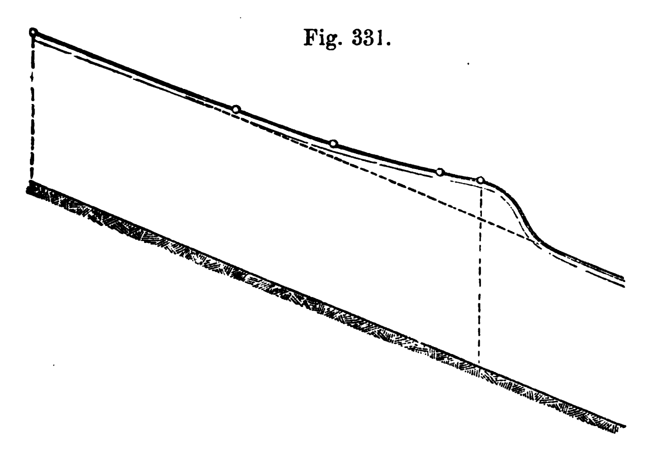
2) $$dx = -\frac{1 - \frac{w^2}{g(t + y)}}{\alpha - \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}} dy.$$

Mit wachsendem x nimmt die Wassertiefe $t + y$ allmählich ab, die Geschwindigkeit w daher allmählich zu; somit verkleinern sich auf der rechten Seite der Gl. 2 mit zunehmendem x sowohl der Zähler wie der Nenner. Wird der Nenner zu Null, während der Zähler noch grösser ist als Null, so geschieht dies für

$$\alpha = \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g},$$

d. h für diejenige Stelle, wo die Bewegung des Wassers eine gleichförmige ist (s. Gl. 2, S. 302); dort ist $\frac{dy}{dx} = 0$, d. h. die Staukurve hat sich dem ungestauten Wasser wieder angeschmiegt. Es

Fig. 331.



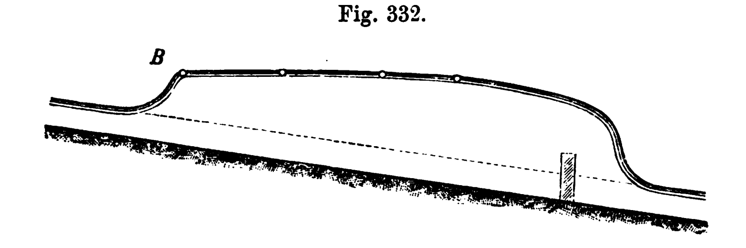
bedeutet dies den gewöhnlichen Fall, dass der Stau sich nach oben hin nur allmählich (ins Unendliche) verliert, wobei die Staukurve ihre konvexe Seite nach unten kehrt (Fig. 331).

Wird aber für irgend eine Stelle, in Gl. 2 der Zähler zu Null, während der Nenner noch grössser ist als Null, so wird

$$\frac{dy}{dx} = -\infty,$$

d. h. es steht an dieser Stelle (B, Fig. 332) der Wasserspiegel (nahezu) lothrecht und bildet einen Wassersprung oder eine

Fig. 332.



Wasserschwelle. Dieser Fall wurde zuerst von dem Italiener Bidone 1820, später aber auch von Jul. Weisbach (Freiberg in

Sachsen) in Kanälen mit grossem Gefällverhältnisse beobachtet. Es verschwindet also der Stau nicht allmählich, sondern bei B plötzlich, wenn daselbst

$$3)\qquad \frac{w^2}{2g} = \frac{t+y}{2}$$

oder die Geschwindigkeitshöhe gleich der halben Wassertiefe, und gleichzeitig

$$\alpha > \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g} \quad \text{ist.}$$

Wegen Gl. 3, und weil annähernd $\frac{F}{u} = t + y$ ist, muss $\alpha > {}^1/_2\beta$ sein, damit ein Wassersprung entstehe; dies bedingt, wenn im Mittel $\beta = 0{,}008$ gesetzt wird, $\alpha > 0{,}004 = 1:250$, d. h. ein ungewöhnlich grosses Gefällverhältnis.

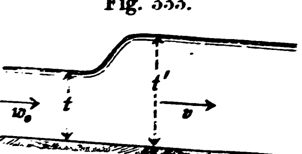


Fig. 333.

Die Höhe des Sprunges lässt sich nach Fig. 333 in folgender Weise annähernd berechnen: Es ist

$$v t' = w_0 t, \quad \text{ferner}$$

$$t - t' = \frac{v^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}$$

und daraus

$$4)\qquad t' = \frac{1}{2}\frac{w_0^2}{2g} + \sqrt{\frac{w_0^2}{2g} t + \frac{1}{4}\left(\frac{w_0^2}{2g}\right)^2}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, in Übereinstimmung mit Gl. 3, dass ein Wassersprung mit $t' > t$ nur dann entsteht, wenn $\frac{w_0^2}{2g} > \frac{t}{2}$ ist.

Um nun die Form der Staukurve im Einzelnen zu erfahren, muss man in Gl. 2 die Veränderlichen w, F und u durch y ausdrücken. Beziehen sich t, w_0, F_0, u_0 auf das ungestaute, gleichmässig fliessende Wasser, $(t+y)$, w, F und u auf das gestaute Wasser, so ist $w^2 = w_0^2 \frac{t^2}{(t+y)^2}$, ferner nach den Regeln der gleichmässigen Bewegung, wenn man wegen der grossen Breite $u = u_0 = b$ setzt, (gemäss S. 327),

$$\frac{w_0^2}{2g} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{F_0}{u_0} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{bt}{b} \doteq \frac{\alpha}{\beta}t \quad \text{und}$$

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{t^3}{(t+y)^2}, \quad \text{sonach mit} \quad \frac{F}{u} = t + y$$

$$\beta \frac{u}{F}\frac{w^2}{2g} = \alpha \frac{t^3}{(t+y)^3}.$$

Hiermit wird aus Gl. 2

$$dx = -dy \frac{1 - 2\frac{\alpha}{\beta}\frac{t^3}{(t+y)^3}}{\alpha\left(1 - \frac{t^3}{(t+y)^3}\right)} \quad \text{oder}$$

5) $$-\alpha dx = dy \frac{(t+y)^3 - 2\frac{\alpha}{\beta}t^3}{(t+y)^3 - t^3}.$$

Behufs der Integration ist auf der rechten Seite eine Zerlegung in Theilbrüche erforderlich, jedoch muss, weil der Zähler nach y von demselben Grade ist wie der Nenner, durch theilweise Division erreicht werden, dass der Zähler von geringerem Grade wird. Fügt man im Zähler $(-t^3 + t^3)$ hinzu, so entsteht nach einmaliger Division:

$$-\alpha dx = dy\left\{1 + \frac{t^3\left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)}{(t+y)^3 - t^3}\right\} \quad \text{oder}$$

6) $$-\alpha dx = dy + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)\frac{t^3}{(t+y)^3 - t^3}dy.$$

Weil $(t+y)^3 - t^3 = 3t^2y + 3ty^2 + y^3 = y(3t^2 + 3ty + y^2)$ ist, so kann der letzte Bruch geschrieben werden

$$\frac{t^3}{(t+y)^3 - t^3} = \frac{t^3}{y(3t^2 + 3ty + y^2)}.$$

Die Zerlegung dieser gebrochenen Funktion in Theilbrüche muss, weil die Gleichung $3t^2 + 3ty + y^2 = 0$ imaginäre Wurzeln hat, in der Form geschehen:

$$\frac{t^3}{y(3t^2 + 3ty + y^2)} = \frac{A}{y} + \frac{Py + Q}{3t^2 + 3ty + y^2}.$$

Nach Fortschaffung der Nenner wird hieraus

7) $$t^3 = 3t^2A + 3tAy + Ay^2 + Py^2 + Qy.$$

Soll diese Gleichung für jeden Werth von y bestehen, so muss zunächst stattfinden für $y = 0$: $t^3 = 3t^2A$, d. h. $A = {}^1\!/_3 t$. Ebenso ergiebt die erste Abge-

leitete der Gl. 7 nach y: $0 = 3tA + 2Ay + 2Py + Q$ und für $y = 0$: $Q = -3tA = -t^2$. Die zweite Abgeleitete $0 = 2A + 2P$ giebt schliesslich $P = -A = -{}^1\!/_3 t$. Hiernach wird

$$\frac{t^2}{y(3t^2 + 3ty + y^2)} = \frac{t}{3}\frac{1}{y} - \frac{{}^1\!/_3 ty + t^2}{3t^2 + 3ty + y^2}.$$

Nun kann man Gl. 6 schreiben:

$$\text{8)} \qquad -\alpha\, dx = dy + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) t \left\{\frac{1}{3}\frac{dy}{y} - \frac{1}{6}\frac{2y + 6t}{3t^2 + 3ty + y^2} dy\right\}.$$

Das Differential des letzten Nenners ist aber $(3t + 2y)\,dy$, daher zerlegen wir den letzten Zähler in $2y + 3t$ und $3t$, um zu erhalten:

$$\text{9)} \qquad -\alpha\, dx = dy + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) t \left\{\frac{1}{3}\frac{dy}{y} - \frac{1}{6}\frac{d(3t^2 + 3ty + y^2)}{3t^2 + 3ty + y^2} dy - \frac{t}{2}\frac{dy}{3t^2 + 3ty + y^2}\right\}.$$

Setzt man zur Integration des letzten Gliedes vorübergehend $y = z + a$, so wird $3t^2 + 3ty + y^2 = 3t^2 + 3tz + 3ta + z^2 + 2az + a^2$; sollen nun die Glieder mit dem Faktor z verschwinden, so muss $3t + 2a = 0$, d. h. $a = -{}^3\!/_2 t$; $z = y + {}^3\!/_2 t$ sein. Dann wird $3t^2 + 3ty + y^2 = 3t^2 - {}^9\!/_2 t^2 + {}^9\!/_4 t^2 + z^2 = {}^3\!/_4 t^2 + z^2$ und

$$\text{10)} \qquad \frac{dy}{3t^2 + 3ty + y^2} = \frac{dz}{{}^3\!/_4 t^2 + z^2} = \frac{2}{t\sqrt{3}}\, d\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{2z}{t\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{t\sqrt{3}}\, d\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2y}{t\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right)\right).$$

Die Integration der Gl. 9 ergiebt dann mit Benutzung von Gl. 10:

$$\text{11)} \qquad \alpha x = -y + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) t \left\{-\frac{1}{3}\,\mathrm{l}\, y + \frac{1}{6}\,\mathrm{l}\,(3t^2 + 3ty + y^2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{y}{t} + \sqrt{3}\right)\right\} + \text{Const.}$$

Vereinigt man in dem Klammerausdrucke die beiden Logarithmen, indem man

$$-\frac{1}{3}\,\mathrm{l}\, y = -\frac{1}{6}\,\mathrm{l}\, y^2 = +\frac{1}{6}\,\mathrm{l}\,\frac{1}{y^2}$$

setzt, und führt zur Abkürzung die Bezeichnung

$$\text{12)} \qquad \frac{1}{6}\,\mathrm{l}\left(3\frac{t^2}{y^2} + 3\frac{t}{y} + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{y}{t} + \sqrt{3}\right) = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

ein (s. die Tabelle auf S. 333), so wird

$$\text{13)} \qquad \alpha x = -y + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) t \cdot f\left(\frac{y}{t}\right) + \text{Const.}$$

Weil nun der Abstand x vom Wehr aus gemessen ist, wo $y = H$, so wird

$$0 = -H + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) t \cdot f\left(\frac{H}{t}\right) + \text{Const.}$$

sonach schliesslich durch Abziehen

14) $$\alpha x = H - y + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) t \left\{ f\left(\frac{y}{t}\right) - f\frac{H}{t}\right)\right\}.$$

Kommt oberhalb des Wehres kein Wassersprung vor, ist also $\alpha < {}^1\!/_2 \beta$ und daher in Gl. 14 der Faktor $\left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) > 0$, so ergiebt sich für $y = 0$, weil nach Gl. 12 für $\frac{y}{t} = 0$ die $f\left(\frac{y}{t}\right) = \infty$ wird, die Strecke $x = \infty$; d. h. in diesem meist vorkommenden Falle erstreckt sich die Wirkung des Staues nach oben hin ins Unendliche: die Staukurve schmiegt sich nach oben hin dem ungestauten Wasserspiegel asymptotisch an. In diesem Falle hat Gl. 14 unbeschränkte Gültigkeit für die Staukurve oberhalb des Wehres, d. h. für $y \leqq H$ (der Stauhöhe am Wehre).

Kommt aber wegen $\alpha > {}^1\!/_2 \beta$ ein Wassersprung vor, steigt also an einer Stelle das Wasser plötzlich von der Tiefe t auf die grössere Tiefe t' an, welche nach Gl, 4 zu berechnen ist, so gilt Gl. 14 nur von dem Wehr aufwärts bis zum Wassersprunge, dessen Lage man mittels Gl. 14 berechnen kann, indem man $y = t' - t$ setzt.

In dem Grenzfalle $\alpha = {}^1\!/_2 \beta$, zwischen den beiden vorstehend erörterten Fällen, wird in Gl. 14 der Faktor $\left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) = 0$, daher einfach

15) $$\alpha x = H - y;$$

Fig. 334.

die Staulinie wird eine wagerechte Gerade BC (Fig. 334), und geht in den ungestauten Wasserspiegel nicht durch allmähliche Anschmiegung, sondern mittels eines (ein wenig abgerundeten) Knickes bei B über.

Die Grössen $f\left(\frac{y}{t}\right)$, welche in die Gl. 14 einzusetzen sind, können aus folgender Tabelle entnommen werden:

Tabelle zur Berechnung der Staukurven.

$\frac{y}{t}$	$f\left(\frac{y}{t}\right)$	$\frac{y}{t}$	$f\frac{y}{t}$
0	∞	$^1/_5$	1,3866
0,01	2,3261	$^1/_4$	1,3267
0,02	2,0983	$^1/_3$	1,2539
0,03	1,9664	$^1/_2$	1,1616
0,04	1,8738	$^2/_3$	1,1050
0,05	1,8026	1	1,0387
0,06	1,7451	1,5	0,9890
0,07	1,6970	2	0.9632
0,08	1,6556	2,5	0,9482
0,09	1,6196	3	0,9384
0,10	1,5875	3,5	0,9317
0,13	1,5092	4	0,9270
$^1/_6$	1,4538	∞	0,9080

Die Berechnung der Tabellenwerthe möge beispielsweise für $\frac{y}{t} = \frac{1}{4}$ gezeigt werden.

Hierfür ist nach Gl. 12:

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}\,l\,(3 \cdot 16 + 3 \cdot 4 + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ arc tg } \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{4} + \sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 2{,}302\,585 \cdot \log 61 + 0{,}577\,35 \text{ arc tg } 2.0307\,.$$

Der Tangente 2,0207 entspricht ein Winkel von $63^\circ\,40'$, ein Bogen $= 1{,}111\,193$. Daher wird, weil $\log 61 = 1{,}785\,330$ ist:

$$f(^1/_4) = 0{,}685\,145\,7 + 0{,}577\,35 \cdot 1{,}111\,193 = 1{,}3267\,.$$

Beispiel 1: Die Breite eines nahezu rechtwinkligen Wasserlaufes sei $b = 100^{\mathrm{m}}$, die Tiefe des ungestauten Wassers $t = 2^{\mathrm{m}}$, die Stauhöhe am Wehre $H = 0{,}5^{\mathrm{m}}$, das Gefällverhältnis $\alpha = 0{,}0002$. Die mittlere Tiefe oberhalb des Wehres beträgt $(2 + 2{,}5) \cdot 0{,}5 = 2{,}25^{\mathrm{m}}$, daher ist im Mittel $r = 225 : 104{,}5 = 2{,}15^{\mathrm{m}}$; das giebt rund $\beta = 0{,}009$ (vergl. S. 306).

Es ist $\frac{H}{t} = \frac{1}{4}$, $f\left(\frac{H}{t}\right) = 1{,}3267$.

Ferner wird $1 - \frac{2\alpha}{\beta} = 1 - \frac{0{,}0004}{0{,}009} = 0{,}9556$.

Setzt man nun $y_1 = 0{,}4^m = 0{,}2\,t = {}^1/_5\,t$, so ergiebt sich nach vorstehender Tabelle $f(0{,}2) = 1{,}3866$, mithin nach Gl. 14:

$$x_1 = 5000\left\{0{,}5 - 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}9556\,(1{,}3866 - 1{,}3267)\right\} = 1072^m.$$

Da die Tabelle zwischen $\frac{y}{t} = 0$ und $\frac{y}{t} = 0{,}25$ 13 Werthe enthält, so kann man aus ihr 13 Punkte, also ausser dem soeben berechneten (x_1, y_1) noch 12, leicht ableiten.

Bemerkung. Geringe Stauhöhen, die nicht grösser sind, als die gewöhnlichen kleinen welligen Unebenheiten der Wasseroberfläche, pflegt man zumeist unbeachtet zu lassen, so dass sich dann statt der ideellen Stauweite $= \infty$ eine endliche, etwa dem Werthe $y_0 = 0{,}01\,t$ entsprechende, begrenzte Stauweite x_0 ergiebt (s. S. 325).

Für vorstehendes Beispiel ergiebt sich mit $y_0 = 0{,}01 \cdot 2 = 0{,}02^m$:

$$x_0 = 5000\left\{0{,}5 - 0{,}02 + 1{,}9112\,(2{,}3261 - 1{,}3267)\right\} = 11950^m.$$

Zwischen $y_1 = 0{,}4$ und $y_0 = 0{,}02^m$ sollen hier nur noch $y_2 = 0{,}2^m = 0{,}1\,t$ und $y_3 = 0{,}1^m = 0{,}05\,t$ berechnet werden. Dann ist

$$x_2 = 5000\left\{0{,}5 - 0{,}2 + 1{,}9112\,(1{,}5875 - 1{,}3267)\right\} = 3902^m,$$

$$x_3 = 5000\left\{0{,}5 - 0{,}1 + 1{,}9112\,(1{,}8026 - 1{,}3267)\right\} = 6547^m.$$

Diese Staukurve ist in Fig. 331, S. 328 gezeichnet; die Längen sind in 1 : 200 000, die Höhen in 1 : 100 dargestellt.

Beispiel 2: Ein gemauerter rechteckiger Kanal von $b = 0{,}325^m$ Breite habe eine Sohlenneigung $\alpha = 0{,}023$. Es bewege sich darin Wasser gleichförmig mit einer Wassertiefe $t = 0{,}064^m$ und einer sekundlichen Wassermenge $Q = 0{,}0351^{cbm}$; dann ist mit $F = 0{,}325 \cdot 0{,}064 = 0{,}0208^{qm}$

$$w_0 = 0{,}0351 : 0{,}0208 = 1{,}688^m$$

$$\frac{w_0^2}{2g} = 0{,}145^m,$$

d. h. bedeutend grösser als die halbe Wassertiefe; mithin ist als Folge einer weiter unten bewirkten Aufstauung ein Wassersprung zu erwarten. Für dessen Höhe liefert Gl. 4:

$$t' = 0{,}073 + \sqrt{0{,}145 \cdot 0{,}064 + 0{,}073^2} = 0{,}194^m.$$

In Wirklichkeit war nach der Messung Bidone's, der an diesem Kanale Versuche anstellte, $t' = 0{,}189$, was also gut übereinstimmt.

Es werde für die weitere Rechnung $t' = 0{,}19$, also die Stauhöhe dort zu $y_0 = 0{,}19 - 0{,}064 = 0{,}126^m$ angenommen.

Die grösste Stauhöhe wurde zu $H = 0{,}216^{\,m}$ gemessen. Dann kann man die Entfernung x_0 des Sprunges von dem Orte der grössten Stauhöhe nach Gl. 14 berechnen. Es ist (gemäss S. 330)

$$\frac{2\,\alpha}{\beta} = \frac{w_0^2}{g\,t} = \frac{0{,}145 \cdot 2}{0{,}064} = 4{,}5\,,$$

$$\frac{H}{t} = \frac{0{,}216}{0{,}064} = 3{,}375\,; \quad \frac{y_0}{t} = \frac{0{,}126}{0{,}064} = \text{rund } 2.$$

$f\left(\frac{H}{t}\right) = f(3{,}375)$ wird durch Interpolation aus der Tabelle S. 333 erhalten zu $0{,}9334$, mithin

$$0{,}023\,x_0 = 0{,}216 - 0{,}126 - 3{,}5 \cdot 0{,}064\,(0{,}9632 - 0{,}9334)$$

und $x_0 = 3{,}6^{\,m}$, während Bidone's Messung etwa $x_0 = 3{,}5^{\,m}$ ergab.

Für $\frac{y_1}{t} = 3$ oder $y_1 = 0{,}192$ wird

$$0{,}023 \cdot x_1 = 0{,}216 - 0{,}192 - 0{,}224\,(0{,}9384 - 0{,}9334)$$

mit $x_1 = 1^{\,m}$.

Für $\frac{y_2}{t} = 2{,}5$ oder $y_2 = 0{,}16^{\,m}$ wird

$$0{,}023\,x_2 = 0{,}216 - 0{,}16 - 0{,}224\,(0{,}9482 - 0{,}9334)$$

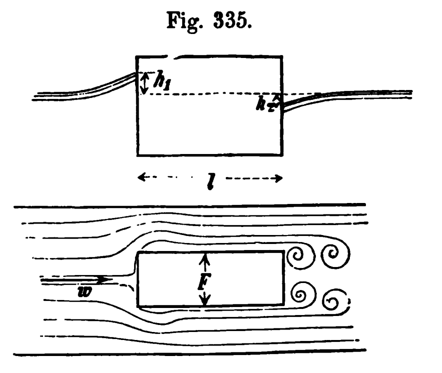
mit $x_2 = 2{,}3^{\,m}$.

Dieser Wassersprung ist in Fig. 332, S. 328 gezeichnet; die Längen sind in 1 : 100, die Höhen in 1 : 20 dargestellt.

4. Druck strömenden Wassers gegen feste Körper; Widerstand des Wassers gegen bewegte Körper.

Bei scheinbarer (relativer) Ruhe des Wassers gegen einen in dasselbe eingetauchten festen Körper, heben sich die wagerechten Seitenkräfte des Wasserdrucks gegen den Körper auf. Strömt aber das Wasser mit einer Geschwindigkeit w gegen den ruhenden Körper (Fig. 335), so werden die einzelnen, ohne Anwesenheit des Körpers parallel verlaufenden Stromfäden gezwungen, den Körper zu umfliessen, sich in gekrümmten Bahnen zu bewegen, wozu Kräfte erforderlich sind. Das Wasser staut sich an der Vorderseite um

Fig. 335.



h_1 auf, während an der Rückseite eine Vertiefung h_2 entsteht; es erfolgt daher auf der Vorderseite eine Vergrösserung, auf der Rückseite eine Verminderung des Druckes gegenüber dem Ruhezustande um P_1 bezw. P_2. Die Gesammtwirkung der Strömung besteht daher in einer Kraft D im Sinne der Geschwindigkeit w, und zwar ist

1) $$D = P_1 + P_2.$$

Der Verlauf der Stromfäden ist theoretisch nicht festzustellen. In Anlehnung aber an die Formel für den Druck eines Wasserstrahls gegen einen festen Körper (S. 279) kann man setzen:

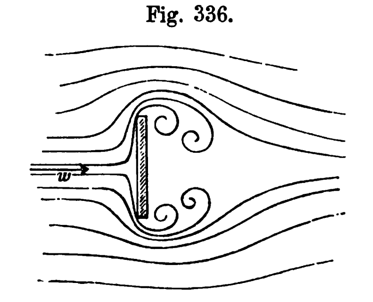
2) $$P_1 = \zeta_1 \gamma F \frac{w^2}{2g}; \quad P_2 = \zeta_2 \gamma F \frac{w^2}{2g},$$

wenn γ die Dichte der Flüssigkeit, F den grössten Querschnitt des eingetauchten Theiles des festen Körpers, rechtwinklig zur Geschwindigkeit w gemessen, und ζ eine von der Form des Körpers abhängige Ziffer, bedeuten. Für ein Prisma mit ebenen, rechtwinklig zu w stehenden Endflächen kann mit einiger Wahrscheinlichkeit $\zeta_1 = 1$ gesetzt, d. h. angenommen werden, dass die Druckvermehrung P_1 an der Vorderseite einer Druckhöhe

$$h_1 = \frac{w^2}{2g}$$

entspricht, während ζ_2 von der Länge l des Prismas, in der Stromrichtung gemessen, abhängig ist.

Fig. 336.



Bei einer dünnen Platte (Fig. 336) ist die Druckverminderung an der Rückseite am stärksten; man setze etwa für

$$\frac{l}{\sqrt{F}} = 0{,}03 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 6$$

$$\zeta_2 = 0{,}86 \quad 0{,}46 \quad 0{,}35 \quad 0{,}33 \quad 0{,}34.$$

Die Gesammtwirkung der Strömung auf einen prismatischen Körper kann also geschrieben werden:

3) $$D = \zeta \gamma F \frac{w^2}{2g}$$

mit $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$; es ist dann für

$$\frac{l}{\sqrt{F}} = 0{,}03 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 6$$

$$\zeta = 1{,}86 \quad 1{,}46 \quad 1{,}35 \quad 1{,}33 \quad 1{,}34.$$

Der Widerstand ruhenden Wassers gegen prismatische, mit der Geschwindigkeit w in der Richtung der Prismenachse bewegte Körper ist ebenfalls nach den Gl. 1 — 3 zu beurtheilen. Es wären dafür sogar die gleichen Ziffern zu erwarten; aus noch unbekannten Gründen ist aber die Ziffer ζ_2 kleiner, während ζ_1 ebenfalls $= 1$ gesetzt werden kann. Es ist für

$$\frac{l}{\sqrt{F}} = 0{,}03 \quad 1 \quad 3 \quad 6$$

$$\zeta_2 = 0{,}43 \quad 0{,}17 \quad 0{,}10 \quad 0{,}10$$

$$\zeta = 1{,}43 \quad 1{,}17 \quad 1{,}10 \quad 1{,}10.$$

Hat die vom Wasser getroffene Platte (Fig. 337) selbst eine Geschwindigkeit c, so kommt für den Druck N gegen die Platte, der bei Vernachlässigung von Reibung und Adhäsion nur rechtwinklig zur Platte sein kann, die scheinbare (relative) Geschwindigkeit u des Wassers gegen die Platte in Frage. Bildet diese mit der Platte den Winkel ε, so hat die Seitengeschwindigkeit $u \cos \varepsilon$ des Wassers parallel zur Platte keinen Einfluss; es wird der Druck N nur durch die Seitengeschwindigkeit $u \sin \varepsilon$ rechtwinklig zur Platte bedingt.

Fig. 337.

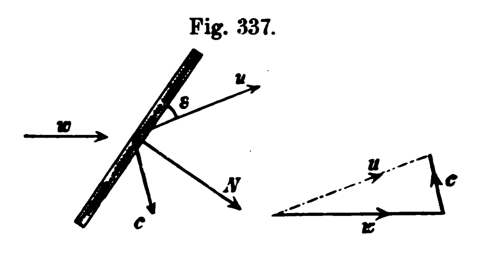
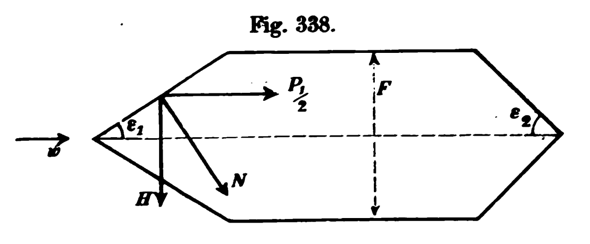


Fig. 338.



Ist wiederum F die Grösse der Platte, so wird auf Grund der Gl. 3:

4) $$N = \zeta \gamma F \frac{u^2 \sin^2 \varepsilon}{2g}.$$

Ist ein prismatischer Körper (Fig. 338) vorn und hinten durch je einen Keil mit lothrechten Seitenebenen und den halben Keil-

winkeln ε_1 bezw. ε_2 zugeschärft, so wird, weil die eine Fläche des Vorderkeils die Grösse $\frac{F}{2 \sin \varepsilon_1}$ hat, der Normaldruck gegen diese

$$N = \zeta_1 \gamma \cdot \frac{F}{2 \sin \varepsilon_1} \frac{w^2}{2 \gamma} \sin^2 \varepsilon_1 .$$

Diese Kraft kann man zerlegen in eine Querkraft H, die durch die entgegengesetzte, von der anderen Keilfläche herrührende, aufgehoben wird, und in eine Längskraft

$$N \sin \varepsilon_1 = \zeta_1 \gamma \frac{F}{2} \frac{w^2}{2g} \sin^2 \varepsilon_1 = {}^1\!/_2 \cdot P_1 .$$

Weil die zweite Fläche des Vorderkeils eine ebenso grosse, gleichgerichtete Kraft liefert und beide zusammen die Druckvergrösserung P_1 an der Vorderseite (in Folge der Strömung) bilden, ist

$$5) \qquad P_1 = \zeta_1 \gamma F \frac{w^2}{2g} \sin^2 \varepsilon_1 .$$

Gegenüber Gl. 2, wird also durch den Faktor $\sin^2 \varepsilon_1$ die Verminderung der Kraft P_1 durch die Zuschärfung der Vorderseite ausgedrückt.

Die Zuschärfung der Rückseite hat einen ähnlich verkleinernden Einfluss auf die Kraft P_2, so dass man

$$6) \qquad P_2 = \zeta_2 \gamma F \frac{w^2}{2g} \sin^2 \varepsilon_2 ,$$

mithin den Gesammtdruck des bewegten Wassers gegen den Körper

$$7) \qquad D = (\zeta_1 \sin^2 \varepsilon_1 + \zeta_2 \sin^2 \varepsilon_2) \gamma F \frac{w^2}{2g}$$

setzen kann.

Für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 45^0$ wird z. B.

$$D = \frac{1}{2} (\zeta_1 + \zeta_2) \gamma F \frac{w^2}{2g} = \frac{1}{2} \zeta \gamma F \frac{w^2}{2g} ,$$

also bei $\frac{l}{\sqrt{F}} = 6$, mit $\zeta = 1{,}1$:

$$D = 0{,}55 \gamma F \frac{w^2}{2g} .$$

Würde unter sonst gleichen Umständen $\varepsilon_2 = 90^0$, der Körper also hinten nicht zugeschärft sein, so erhielte man

$$D = (0{,}5 + 0{,}1)\,\gamma\, F \frac{w^2}{2g} = 0{,}6\,\gamma\, F \frac{w^2}{2g},$$

während $\varepsilon_1 = 90^0$, $\varepsilon_2 = 45^0$, d. h. Zuschärfung nur am hinteren Ende,

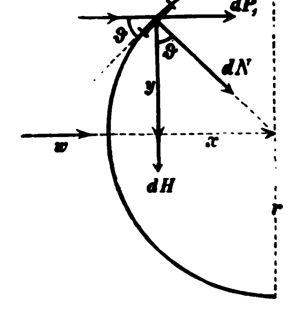
$$D = (1 + 0{,}055)\,\gamma\, F \frac{w^2}{2g} = 1{,}055\,\gamma F \frac{w^2}{2g}$$

liefern würde.

Sind Vorder- und Hinterfläche des Körpers gekrümmt, so wendet man die vorstehenden Rechnungen auf ein als eben betrachtetes Flächentheilchen an und findet den Gesammtdruck D durch Integration.

Ist die Vorderfläche eine Cylinderfläche vom Halbmesser r und der Höhe h, so wird (Fig. 339) für ein Flächentheilchen $dF = ds \cdot h$ derselben, welches mit w den Winkel ϑ bildet und die Mittelpunkts-Koordinaten x und y hat:

Fig. 339.



8) $$dN = \zeta_1 \gamma\, dF \frac{w^2 \sin^2\vartheta}{2g},$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$\zeta_1 \gamma \frac{w^2}{2g} = \mathfrak{p}_1 \quad \text{setzt:}$$

$$dN = \mathfrak{p}_1\, dF \sin^2\vartheta.$$

Die Seitenkraft in der Richtung von w wird dann:

9) $$dP_1 = \mathfrak{p}_1\, dF \sin^3\vartheta,$$

während die andere Seitenkraft dH ohne Bedeutung ist. Weil nun $dF = h \cdot ds$, $\sin\vartheta = \frac{x}{r} = \frac{dy}{ds}$ und $x^2 = r^2 - y^2$ ist, so wird

$$dP_1 = \mathfrak{p}_1 h \frac{x^2}{r^2} dy = \mathfrak{p}_1 \frac{h}{r^2}(r^2 - y^2)\, dy.$$

Für die halbcylindrische Vorderfläche hat man y zwischen den Grenzen $y = -r$ und $y = +r$ oder doppelt von $y = 0$ bis $y = r$ zu nehmen, mithin

$$P_1 = 2\,\mathfrak{p}_1 \frac{h}{r^2} \int_0^r (r^2 - y^2)\, dy = 2\,\mathfrak{p}_1 \frac{h}{r^2} \frac{2}{3} r^3.$$

Da nun die Querschnittsfläche des Körpers $F = 2rh$ ist, so wird

$$10)\qquad P_1 = {}^2/_3\,\mathfrak{p}_1 F = \frac{2}{3}\cdot\zeta_1\cdot\gamma\cdot F\cdot\frac{w^2}{2g},$$

d. h. es wird in Folge der halbcylindrischen Abrundung, der Überdruck P_1 gegenüber dem auf eine ebene Fläche F (Gl. 2), auf $^2/_3$ verkleinert. — Für einen **Vollcylinder** (Fig. 340) ist dann an der Rückseite ebenso der Minderdruck

$$P_2 = \frac{2}{3}\mathfrak{p}_2 F, \quad \text{wenn}$$

$$\mathfrak{p}_2 = \zeta_2\gamma\frac{w^2}{2g} \quad \text{bedeutet,}$$

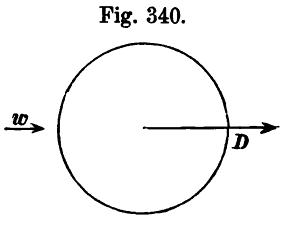
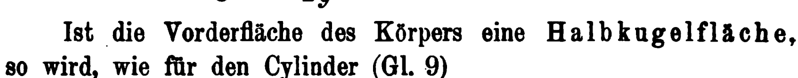


Fig. 340.

daher der gesammte Druck

$$11)\qquad D = \frac{2}{3}\zeta\gamma F\frac{w^2}{2g}.$$

Ist die Vorderfläche des Körpers eine Halbkugelfläche, so wird, wie für den Cylinder (Gl. 9)



$$dP_1 = \mathfrak{p}_2\, dF \sin^3\vartheta.$$

Da nun ϑ für alle Theile der Kugelzone QQ_1 (Fig. 341) den gleichen Werth hat, so kann als dF sogleich die ganze Zone

$$dF = 2\pi y\, ds = 2r\pi\, dx,$$

(wegen $ds = dx\cdot r : y$) eingeführt werden. Dann wird mit

$$\sin\vartheta = \frac{x}{r}:$$

$$dP_1 = \mathfrak{p}_1\frac{2r\pi}{r^3}x^3\,dx.$$

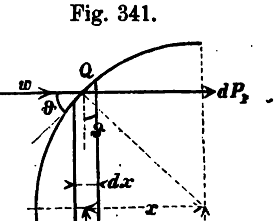


Fig. 341.

Dies giebt, für die Halbkugel zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = r$ integrirt:

$$12)\qquad P_1 = \mathfrak{p}_1\cdot\frac{2\pi}{r^2}\int_0^r x^3\,dx = \frac{1}{2}\mathfrak{p}_1 r^2\pi = \frac{1}{2}\mathfrak{p}_1 F,$$

d. h. die halbkugelförmige Abrundung vermindert den Überdruck P_1 gegenüber dem für eine ebene Fläche auf die Hälfte.

Für eine **Kugel** ist dann an der Rückseite ebenso $P_2 = {}^1/_2\,\mathfrak{p}_2 F$, daher der gesammte Druck

13) $$D = \frac{1}{2}\,\mathfrak{p} F = \frac{1}{2}\zeta\gamma F \frac{w^2}{2g}.$$

Soll die Kraft D die Kugel in ruhendem Wasser mit der Geschwindigkeit w gleichmässig bewegen, so wäre (wenn man die für Prismen gefundenen Zahlen auch hier anwendet) nach S. 337, mit

$$\frac{l}{\sqrt{F}} = \frac{2r}{r\sqrt{\pi}} = 1{,}128,$$

$\zeta = 1{,}16$ zu wählen. Hiermit würde dann

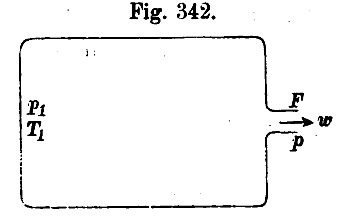
$$D = 0{,}58\,\gamma F \frac{w^2}{2g},$$

während Versuche im Mittel die Ziffer 0,54 statt 0,58 ergeben haben.

5. Ausfluss der Gase aus Gefässen, bei geringem Überdruck.

Innerhalb eines grossen Gefässes (Fig. 342) befinde sich ein Gas unter dem Drucke p_1 und der absoluten Temperatur T_1; dann ist dessen Dichte γ_1 bezw. dessen Einheitsraum v_1 (Gl. 1, S. 212) auf Grund der Zustandsgleichung (Gl. 6, S. 220) bestimmt:

Fig. 342.



1) $$\gamma_1 = \frac{1}{v_1} = \frac{p_1}{R\,T_1}.$$

Ausserhalb des Gefässes herrsche der Druck p. Dann kann man, falls $p_1 : p$ nicht viel grösser als 1 ist, annehmen, dass das aus einer kleinen Öffnung F strömende Gas beim Ausströmen den Druck p annimmt. Mit dieser Druckverminderung ist nicht allein eine Verminderung der Dichte, sondern auch eine Verminderung der Temperatur verbunden. Bei nur geringem Unterschiede der Drücke p_1 und p möge aber die Dichte-Verminderung einstweilen unberücksichtigt bleiben, also angenommen werden, dass das Gas mit der Dichte γ_1 auch zum Ausflusse gelange.

Unter dieser Annahme verschwindet der wesentliche Unterschied zwischen Gasen und tropfbar-flüssigen Körpern, und es kann

nun wie für den Ausfluss des Wassers auch für den Ausfluss der Gase die Gl. 6, S. 242 angewandt werden, welche wegen der Kleinheit der Öffnung F lautet:

$$w = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1 - p}{\gamma_1}\right)}.$$

Der Druck p_1 nimmt wohl im Gefässe von oben nach unten etwas zu, jedoch sehr unbedeutend. Bezeichnet man mit p_1 den Druck des Gases in der Höhe der Ausflussöffnung, so ist in obiger Gleichung $h = 0$ zu setzen, die nicht unmittelbar zu messende Dichte γ_1 nach Gl. 1 einzuführen, und ebenso wie beim Ausflusse von Wasser, eine Geschwindigkeitsziffer φ hinzuzufügen, welche nach Grashof (Theoretische Maschinenlehre, 1. Band, S. 585) auf Grund Weisbach'scher Versuche zu etwa

2) $$\varphi = 0{,}98$$

angenommen werden kann. Hiernach wird

3) $$w = \varphi \sqrt{2gRT_1\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)}.$$

Bei der Berechnung der sekundlichen Ausflussmenge ist noch zu berücksichtigen, dass beim Ausflusse von Gasen, aus denselben Gründen wie bei Wasser, im Allgemeinen eine Einschnürung vorkommt, dass der Strahlquerschnitt also $= \alpha F$ zu setzen ist.

Bei kreisförmiger Öffnung in dünner Wand kann

$$\alpha = 0{,}65,$$

mithin die Ausflussziffer

$$\mu = \alpha \cdot \varphi = 0{,}64$$

gesetzt werden.

Bei Gasen pflegt man die sekundliche Ausflussmenge in Kilogrammen auszudrücken, weil bei der Angabe nach Kubikmetern stets noch die Dichte ausserdem anzugeben wäre, um die Ausflussmenge bestimmt zu kennzeichnen.

Die sekundlich ausfliessende Gewichtsmenge ist dann

$$G = \gamma_1 \alpha \cdot F \cdot w \quad \text{oder}$$

4) $$G = \frac{p_1}{RT_1} \mu F \sqrt{2gRT_1\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)}.$$

Diese Gleichung gilt aber nur für sehr geringen Überdruck.

Beispiel: Der Aussendruck p betrage 1^{at}, entsprechend einer Quecksilbersäule von 735^{mm} (s. S. 226). In einem Gefässe befinde sich Luft von $t_1 = 10^0$ C. oder $T_1 = 283^0$ und einem Drucke $p_1 = 765^{mm}$ Quecksilbersäule. In der Gefässwand befinde sich ein rundes Loch von $1^{qcm} = 0{,}0001^{qm}$ Grösse. Es sollen die sekundliche Geschwindigkeit und Gewichtsmenge der ausströmenden Luft berechnet werden. Mit $R = 29{,}27$ (s. S. 220) und $\varphi = 0{,}98$ wird nach Gl. 3:

$$w = 0{,}98 \sqrt{2g \cdot 29{,}27 \cdot 283 \left(1 - \frac{735}{765}\right)} = 78^{m}/_{s.}.$$

Mit
$$\gamma_1 = \frac{10000}{29{,}27 \cdot 283} \frac{765}{735} = 1{,}2565$$

und $\alpha = 0{,}65$ ergiebt sich nach Gl. 4:

$$G = 1{,}2565 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}0001 \cdot 78 = 0{,}00637^{kg}/_{s.}.$$

6. Specifische Wärme; Zustandsänderungen der Gase.

Die Temperatur eines Körpers, also auch eines Gases, kann man erhöhen, indem man dem Körper, etwa mittels einer Heizung, Wärme zuführt. Die Menge der Wärme wird nach Wärmeeinheiten gemessen. — Unter einer **Wärmeeinheit** (WE) versteht man in der Technik diejenige Wärmemenge, welche nöthig ist, um 1^{kg} Wasser unter 1^{at} Druck von 0^0 C. auf 1^0 C. zu erwärmen. Die nach Wärmeeinheiten gemessene Wärmemenge wird mit Q (Quantum) bezeichnet.

Die Anzahl der Wärmeeinheiten, welche 1^{kg} irgend eines Stoffes erfordert, um dessen Temperatur um 1^0 C. zu erhöhen, heisst die **specifische Wärme** oder die **Wärmekapacität** dieses Stoffes.

Die specifische Wärme eines Gases zeigt sich verschieden, je nachdem das Gas bei der Wärmezuführung

1. in einem Gefässe von unveränderlichen Rauminhalte v festgehalten wird, oder aber

2. sich unter einem unveränderlichem Drucke p (etwa dem eines belasteten, reibungslosen Kolbens) auszudehnen vermag.

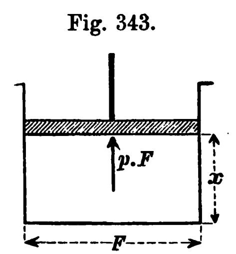
Die specifische Wärme für unveränderliches specifisches Volumen v, also auch für unveränderliche Dichte $\gamma = 1 : v$ (s. S. 212), werde mit c, diejenige für unveränderlichen Druck p mit c_1 bezeichnet. Beide sind für ein bestimmtes Gas feste Werthe, unabhängig von der Temperatur.

Die durch Versuche ermittelten Grössen c und c_1 haben ergeben, dass für ein bestimmtes Gas stets $c < c_1$ ist. So ist z. B. für atmosphärische Luft $c = 0{,}1684$; $c_1 = 0{,}2375$. — Man erklärt diese Erscheinung daraus, dass bei der Temperaturerhöhung unter gleichzeitiger Ausdehnung des Gases, etwa durch Verschiebung eines das Gas abschliessenden Kolbens, von dem Gase auf diesen Kolben eine mechanische Arbeit übertragen wird, dass also diese Ausdehnungs-Arbeit einen Theil der zugeführten Wärmemenge erfordert, während der noch verbleibende Rest der zugeführten Wärmemenge zur Erhöhung der Temperatur, d. h. zur Vermehrung des inneren Arbeitsvermögens des Gases verwendet wird.

Befindet sich 1 kg Gas in einem Cylinder (Fig. 343) vom Querschnitt F und füllt es in diesem eine Höhe x aus, so ist sein Rauminhalt

$$v = F \cdot x.$$

Fig. 343.



Das Gas übt auf den Kolben eine Kraft $p \cdot F$ aus. Bei einer Verschiebung des Kolbens um dx nach oben, überträgt das Gas an den Kolben eine Arbeit

$$d\mathfrak{A} = p \cdot F \cdot dx,$$

oder mit $F \cdot dx = dv$,

1) $$d\mathfrak{A} = p \cdot dv.$$

Dies ist die Ausdehnungsarbeit bei einer unendlich kleinen Vergrösserung des specifischen Volumens. Zwischen dieser Arbeit und der auf sie verwendeten Wärmemenge dQ besteht nach den Lehren der Physik ein festes Verhältnis. Überhaupt sind W ä r m e u n d A r b e i t g l e i c h w e r t h i g. Mag Wärme Q in Arbeit $\mathfrak{A}$ umgewandelt werden, wie bei der Dampfmaschine, der Heissluft- und Gaskraftmaschine, oder mag äusseres Arbeitsvermögen $\mathfrak{A}$ in Wärme Q übergehen, wie bei der Reibung oder beim Stosse (s. 1. Theil, 2. Aufl., S. 269 und S. 141), — immer besteht zwischen beiden das f e s t e V e r h ä l t n i s:

3) $$Q = A \cdot \mathfrak{A}.$$

Der Festwerth A heisst der W ä r m e w e r t h d e r A r b e i t s e i n h e i t, und bezeichnet die Anzahl der Wärmeeinheiten, die durch 1 mkg erzeugt werden können; — der reciproke Werth $1 : A$ heisst der

Arbeitswerth der Wärmeeinheit, und bezeichnet die Anzahl der Meterkilogramme, die mit 1^{WE} gleichwerthig sind.

Messungen der verschiedensten Art haben ergeben:

$$3)\qquad A = \frac{1}{424}{}^{WE} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{A} = 424^{\text{mkg}}.$$

Der Wärmezustand oder innere Zustand eines Theilchens eines Körpers, insbesondere eines Gases, ist bedingt durch seine Temperatur t, seinen Druck p und sein specifisches Volumen v, von denen aber **zwei** die dritte bestimmen, weil zwischen ihnen eine feste Beziehung die **Zustandsgleichung** $t = f\,(p, v)$ besteht, welche für Gase mit $T = 273 + t$, nach S. 220 die einfache Form hat:

$$4)\qquad T = \frac{p \cdot v}{R}.$$

R ist für jedes Gas ein besonderer Festwerth, ausgedrückt durch:

$$R = \frac{p \cdot v}{T} = \frac{p}{\gamma T}.$$

Wenn man **verschiedene** Gase auf gleiche Temperatur, z. B. den Gefrierpunkt des Wassers $t_0 = 0^0$ oder $T_0 = 273^0$, und auf gleichen Druck, z. B. den Atmosphärendruck $p_0 = 760^{\text{mm}}$ Quecksilbersäule bringt, so ist R verhältnisgleich mit den diesem Zustande entsprechenden specifischen Volumen v_0, oder umgekehrt verhältnisgleich mit den entsprechenden Dichten γ_0 der verschiedenen Gase. Da unter dieser Voraussetzung für trockene atmosphärische Luft (nach S. 220) $\gamma_0 = 1{,}2932$ und $R = 29{,}27$ ist, so ergiebt sich für **Wasserstoff** mit $\gamma_0 = 0{,}08957$ dessen Festwerth zu:

$$R = \frac{29{,}27 \cdot 1{,}2932}{0{,}08957} = 422{,}6.$$

Nach dem Vorstehenden, besonders nach Gl. 4, bestimmen p und v schon vollständig den Wärmezustand eines Gastheilchens.

Es soll nun die Wärmemenge berechnet werden, die man einem Kilogramm Gas von überall gleichem Wärmezustande zuführen muss, damit das Gas eine unendlich kleine Zustandsänderung erfahre. In Gl. 4 erscheint T als Funktion der zwei Veränderlichen p und v; die theilweisen Differentiale sind somit

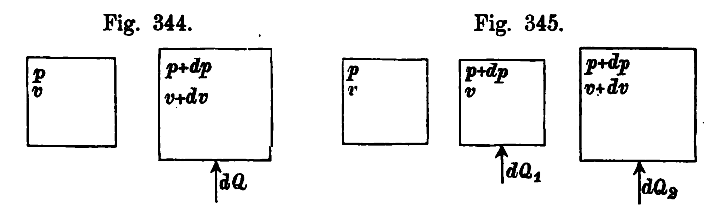
$$5)\qquad \frac{\partial T}{\partial p}\,dp = \frac{v}{R}\,dp \quad \text{und} \quad \frac{\partial T}{\partial v}\,dv = \frac{p}{R}\,dv.$$

Bei gleichzeitiger Änderung von p und v ist dann das vollständige Differential von T:

6) $$dT = \frac{v}{R}dp + \frac{p}{R}dv.$$

In Fig. 344 ist eine unendlich kleine totale Zustandsänderung angedeutet, welche durch Zuführung der Wärmemenge dQ

Fig. 344. Fig. 345.



bewirkt wird. Diese kann in zwei auf einander folgende partielle Änderungen (Fig. 345) zerlegt werden. Die erste Änderung bei gleichbleibendem Volumen v erfordere die Wärmemenge dQ_1; bei dieser ändert sich T nur partiell nach p um

$$\frac{\partial T}{\partial p}dp = \frac{v}{R}dp;$$

hierbei kommt die specifische Wärme c in Frage, und es ist nach der Bedeutung von c (S. 343)

$$dQ_1 = c\frac{\partial T}{\partial p}dp = c\frac{v}{R}dp.$$

Die zweite Änderung bei dem nun gleichbleibenden Druck $p + dp$ erfordere die Wärmemenge dQ_2; für diese gilt mit der specifischen Wärme c_1, unter Vernachlässigung der unendlich kleinen Grösse zweiter Ordnung,

$$dQ_2 = c_1\frac{\partial T}{\partial v}dv = c_1\frac{p}{R}dv.$$

Die ganze erforderliche Wärmemenge ist dann

7) $$dQ = dQ_1 + dQ_2 = c\frac{v}{R}dp + c_1\frac{p}{R}dv.$$

Nach Gl. 6 ist $\frac{v}{R}dp = dT - \frac{p}{R}dv$, also kann man auch schreiben:

8) $$dQ = c \cdot dT + (c_1 - c)\frac{p}{R}dv.$$

Hierin bedeutet $c \cdot dT$ diejenige Wärmemenge, welche zur Erhöhung der Temperatur verwendet wird, während $(c_1 - c)\frac{p}{R}dv$ diejenige Wärmemenge bezeichnet, die zur Ausdehnungs-Arbeit $d\mathfrak{A} = p\,dv$ nöthig ist. Daher ergiebt sich $\frac{c_1 - c}{R}$ als diejenige Grösse A (Gl. 2, S. 344), mit der die Arbeit $d\mathfrak{A}$ zu multipliciren ist, um die entsprechende, d. h. gleichwerthige Wärmemenge dQ zu liefern; also ist

9) $$A = \frac{c_1 - c}{R}.$$

Für jedes Gas steht c_1 und c in einem bestimmten Verhältnis (s. S. 343), das man mit n bezeichnet, also wird mit

10) $$\frac{c_1}{c} = n,$$

11) $$A = c\frac{(n-1)}{R}.$$

Für Luft ist $n = 1{,}405$, für Sauerstoff $n = 1{,}40$, für Stickstoff, Wasserstoff und Kohlenoxyd $n = 1{,}405$, d. h. für diejenigen Gase, die unter gewöhnlichen Umständen weit von dem Flüssigkeitszustande entfernt sind, kann man ziemlich übereinstimmend $n = 1{,}41$ $(= \sqrt{2})$ setzen.

Da für Luft (S. 344) $c_1 = 0{,}2375$ und $c = 0{,}1684$ ist, folgt mit $n = 1{,}41$ und $R = 29{,}27$ aus Gl. 11:

$$A = \frac{0{,}1684 \cdot 0{,}41}{29{,}27} = \text{rund } \frac{1}{424}, \quad \text{wie in Gl. 3.}$$

Nun kann Gl. 8 auch geschrieben werden:

12) $$dQ = c \cdot dT + A \cdot p \cdot dv = c \cdot dT + A \cdot d\mathfrak{A}.$$

Hat ein Gas zu Anfang den Druck p_1, den Einheitsraum v_1, die absolute Temperatur T_1 und gehen diese Werthe auf irgend eine Weise über in p_2, v_2 und T_2, so ist dazu eine Wärmezuführung

13) $$Q = c(T_2 - T_1) + A\int_{v_1}^{v_2} p\,dv = c(T_2 - T_1) + A \cdot \mathfrak{A}$$

erforderlich Sind die Temperaturen zu Anfang und zu Ende gleich $(T_1 = T_2)$, so entspricht die zuzuführende Wärme genau der geleisteten Ausdehnungs-Arbeit, d. h. man erhält in diesem Falle

$Q = A \cdot \mathfrak{A}$ in Wärmeeinheiten, indem man die in Meterkilogrammen ausgedrückte Arbeit $\mathfrak{A}$ durch 424 theilt.

Die während einer Zustandsänderung, d. h. einer Änderung der Grössen p und v, von dem Gase geleistete Ausdehnungs-Arbeit $\mathfrak{A}$ und die zuzuführende Wärmemenge Q hängen aber nicht nur von den Anfangs- und Endwerthen der Grössen p und v ab, sondern werden noch im Besonderen durch die Art bedingt, in welcher die gleichzeitige Änderung von p und v vor sich geht, denn $\mathfrak{A} = \int p\,dv$ hat nur dann einen bestimmten Werth, wenn p als Funktion von v bekannt ist.

Fig. 346.

Ist eine Gleichung zwischen p und v gegeben, so ist dadurch p auf v und somit, nach der Zustandsgleichung (Gl. 4), auch T auf v zurückgeführt. Trägt man (Fig. 346) v als Abscisse, p als Ordinate auf, so erhält man als Darstellung der Zustandsänderung die sog. Zustandskurve BC. Die Arbeit $\mathfrak{A} = \int p\,dv$ wird dann gemessen durch die Fläche $BCDE$ der Zustandskurve.

Zustandsänderung bei gleichbleibender Temperatur (isothermische Zustandsänderung). Wird der Vorgang so geregelt, dass bei veränderlichem v die Temperatur T unverändert $= T_1$ bleibt, so wird, weil anfänglich $T_1 = \frac{p_1 v_1}{R}$ war und später $T_1 = \frac{p v}{R}$ ist,

Fig. 347.

$$14)\quad \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 \quad \text{oder} \quad \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}_1} = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}},$$

übereinstimmend mit dem Boyle-Mariotte'schen Satze (Gl. 2, S. 212), der ja für gleichbleibende Temperatur gilt. — Dies ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, bezogen auf die Asymptoten; ihre Darstellung in Fig. 347 heisst die isothermische Zustandskurve. Jedem Punkte p_1, v_1 der Ebene APV entspricht ein bestimmter Werth $p_1 v_1 = R T_1$.

Für verschiedene Werthe von T_1 erhält man verschiedene Zustandskurven. Denkt man sich die allgemeine Zustandsgleichung $p \cdot v = RT$ mit den 3 veränderlichen Koordinaten p, v und T so dargestellt, dass die T lothrecht zur wagerechten Ebene der pv (APV) aufgetragen werden, so erhält man die für jedes bestimmte Gas durch den Festwerth R bestimmte Zustandsfläche. Schneidet man diese Zustandsfläche durch wagerechte Ebenen in den Höhen T_1, T_2, $T_3 \ldots$, so ergeben sich als Schnittlinien die diesen Temperaturen entsprechenden isothermischen Zustandskurven. (Fig. 347).

Die Ausdehnungsarbeit für 1 kg eines Gases vom Rauminhalte v_1 auf den Rauminhalt v_2 ist

$$\mathfrak{A} = \int_{v_1}^{v_2} p\, dv,$$

oder mit $p = \frac{p_1 \cdot v_1}{v}$:

15) $$\mathfrak{A} = p_1 \cdot v_1 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = p_1 v_1 \, \mathrm{l}\left(\frac{v_2}{v_1}\right),$$

wofür man auch schreiben kann

16) $$\mathfrak{A} = p_1 v_1 \, \mathrm{l}\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = R T_1 \, \mathrm{l}\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = p_1 v_1 \, \mathrm{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

Diese Zustandsänderung mit gleichbleibendem $T = T_1$ wird nur dann erfolgen, wenn für jede unendlich kleine Ausdehnung dv dem Gase nur die der Arbeit $d\mathfrak{A} = p\,dv$ entsprechende Wärmemenge $dQ = A \cdot d\mathfrak{A}$ zugeführt wird (nach Gl. 12 mit $dT = 0$). Da $d\mathfrak{A} = p \cdot dv$ durch den schraffirten Flächenstreifen in Fig. 347 dargestellt erscheint, so ist ersichtlich, dass bei gleichmässiger Änderung von v die Wärmezuführung zu Anfang stärker sein muss als später.

Bei einer Zusammendrückung von v_2 auf v_1 muss die Arbeit $\mathfrak{A}$ als Verdichtungsarbeit von aussen auf das Gas übertragen werden; in diesem Falle ist die Arbeit $\mathfrak{A}$, welche der Gasdruck auf den Kolben überträgt, und somit auch Q, negativ, d. h. es muss dem Gase die Wärmemenge Q entzogen werden (etwa durch Kühlwasser).

Beispiel: Ein Kilogramm Luft habe die Temperatur $t_1 = 10^0$ oder $T_1 = 283^0$, den Druck $p_1 = 50\,000$ kg/qm $= 5$ at, also den Rauminhalt $v_1 = R T_1 : p_1 = 0{,}16567$ cbm. Bei der Ausdehnung auf $v_2 = 5\, v_1$, wobei unter Gleicherhaltung der Temperatur $T_2 = T_1$ der Druck auf $p_2 = {}^1/_5\, p_1$ abnimmt, wird nach Gl. 16 von dem Gase die Arbeit

$$\mathfrak{A} = 50\,000 \cdot 0{,}16567\, \mathfrak{l}\,(5) = 13\,323 \text{ mkg}$$

geleistet, d. h. eigentlich nur übertragen, denn geliefert wird die Arbeit aus der nach Gl. 2 zuzuführenden Wärmemenge

$$Q = \frac{13\,323}{424} = 31{,}42 \; WE.$$

Presst man das Gas wieder zusammen und entzieht fortwährend so viel Wärme, dass die Temperatur stets $t = 10^0$ verbleibt, so muss man die Arbeit $\mathfrak{A} = 13\,323$ mkg aufwenden, die aber in Form von Wärme mit $Q = 31{,}42$ WE an das etwaige Kühlwasser übergeht.

Zustandsänderung bei gleichbleibendem Druck. Bei gleichbleibendem $p = p_1$ wird die Zustandskurve eine der v-Achse parallele Gerade (Fig. 348), daher

17) $\mathfrak{A} = p_1 (v_2 - v_1) = R (T_2 - T_1).$

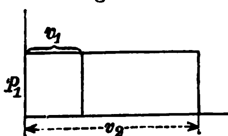


Fig. 348.

Die Temperaturänderung folgt der Gleichung

18) $$\frac{T}{T_1} = \frac{v}{v_1}$$

(Satz von Gay-Lussac, S. 219).

Somit wird nach Gl. 13 die zuzuführende Wärmemenge

$$Q = c(T_2 - T_1) + A \cdot R \cdot (T_2 - T_1) = (T_2 - T_1)(c + AR),$$

oder wegen $A = \dfrac{c_1 - c}{R}$ (Gl. 9):

19) $$Q = c_1 (T_2 - T_1),$$

und mit $$T = \frac{pv}{R}$$

20) $$Q = c_1 \frac{p_1}{R} (v_2 - v_1),$$

wie nach der Bedeutung von c_1 selbstverständlich ist.

Zustandsänderung bei gleichbleibendem Raume. Diese wird durch eine zur p-Achse parallele Gerade dargestellt (vgl. Fig. 348). Es ist in diesem Falle

21) $$\frac{T}{T_1} = \frac{p}{p_1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = 0.$$

Nach Gl. 13 wird

22) $$Q = c\,(T_2 - T_1) = c\,\frac{v_1}{R}\,(p_2 - p_1);$$

wie der Bedeutung von c entspricht.

Zustandsänderung ohne Zuführung oder Entziehung von Wärme (adiabatische Zustandsänderung). Denkt man sich das Gas in einem Cylinder mit beweglichem Kolben befindlich, dessen Wandungen für Wärme undurchlässig sind, und den Kolben nach aussen verschoben, so ändert sich unmittelbar v und als Folge davon p und T. Diese Änderung heisst nach dem Vorschlage des schottischen Ingenieurs Professor Rankine (geb. 1820 zu Edinburg, gest. 1872 zu Glasgow) adiabatische Zustandsänderung (von ἀδιάβατος = undurchdringlich), deren Bedingung also ist, dass die zugeführte Wärmemenge für jedes Zeittheilchen Null sei, d. h. nach Gl. 7

$$dQ = 0 = c\,\frac{v}{R}\,dp + c_1\,\frac{p}{R}\,dv.$$

Daraus wird mit $$\frac{c_1}{c} = n$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{c_1}{c}\,\frac{dv}{v} = -n\,\frac{dv}{v} \quad \text{und}$$

23) $$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^n.$$

Diese Gleichung heisst der Poisson'sche Satz; — ihre Darstellung giebt die adiabatische Zustandskurve. Während beim Boyle'schen Satze (Gl. 14) der Exponent der rechten Seite $= 1$ ist, hat er hier den Werth $n = 1{,}41$.

Da nun $p_1 v_1 = R\,T_1$ und $p\,v = R\,T$, also $\frac{p}{p_1} = \frac{T}{T_1}\,\frac{v_1}{v}$ ist, so wird für die Temperaturänderung

24) $$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{n-1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Aus Gl. 13 ergiebt sich mit $Q = 0$:

25) $$\mathfrak{A} = \frac{c}{A}\,(T_1 - T_2).$$

Bei der Ausdehnung des Gases wird für $v_2 > v_1$, nach Gl. 24, $p_2 < p_1$ und $T_2 < T_1$; es erfolgt daher eine Temperaturabnahme; die Ausdehnungsarbeit wird auf Kosten des inneren Arbeitsvermögens, d. h. der Temperatur, verrichtet. Bei der Zusammendrückung auf einen kleineren Raum erfolgt dagegen eine Erhöhung des Druckes sowie der Temperatur. Die von aussen zur Zusammendrückung aufgewandte Arbeit setzt sich vollständig in inneres Arbeitsvermögen, Erhöhung der Temperatur, um.

Beispiel 1: Ein Kilogramm Luft habe die Temperatur $t_1 = 10^0$ oder $T_1 = 283^0$, den Druck $p_1 = 50\,000$ kg/qm, also den Rauminhalt $v_1 = R\,T_1 : p_1 = 0{,}16567$ cbm. Bei einer adiabatischen Ausdehnung auf $v_2 = 3\,v_1$ vermindert sich der Druck nach Gl. 23 auf $p_2 = p_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{1,41} = 0{,}2125\,p_1 = 10\,625$ kg/qm, und die Temperatur nach Gl. 24 auf $T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{0,41} = 0{,}6373\ T_1 = 180^0$, entsprechend $t_2 = -93^0$. Es entsteht also eine überraschend grosse Abkühlung um 103^0 C. Die Ausdehnungsarbeit beträgt (Gl. 25)

$$\mathfrak{A} = 0{,}1684 \cdot 424 \cdot 103 = 7354 \text{ mkg}.$$

Bemerkung. Die unter Umständen sehr bedeutende Temperatur-Verminderung, welche Luft bei einer adiabatischen Druckverminderung erleidet, kann zur Kühlung von Räumen nur verwerthet werden, wenn die Luft unter Verrichtung von Arbeit in dem Cylinder einer Kaltluftmaschine den geringeren Druck angenommen hat.

Beispiel 2: Hatte 1 kg Luft anfänglich den Druck $p_1 = 10\,000$ kg/qm, die Temperatur $t_1 = 15^0$ oder $T_1 = 288^0$ und den Rauminhalt v_1, und wird diese Luftmenge ohne Wärmeentziehung auf $v_2 = \frac{1}{5}\,v_1$ verdichtet, so wird

$$\frac{p_2}{p_1} = 5^{1,41} = 9{,}67 \quad \text{daher} \quad p_2 = 96\,700 \text{ kg/qm},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 5^{0,41} = 1{,}93 \quad \text{daher} \quad T_2 = 557^0 \quad \text{oder} \quad t_2 = 284^0.$$

Es entsteht also eine Wärmezunahme um 269^0 C.

(Zinn kommt bei 230^0 zum Schmelzen, Blei bei 330^0.)

Die Zusammendrückungsbeit ergiebt sich zu

$$\mathfrak{A} = 0{,}1684 \cdot 424 \cdot 269 = 19\,207 \text{ mkg}.$$

Die Bedingungen für eine adiabatische Zustandsänderung sind annähernd erfüllt, wenn ohne besondere Vorkehrungen eine Raumänderung schnell erfolgt. Dann ist keine Zeit zur Wärmemittheilung

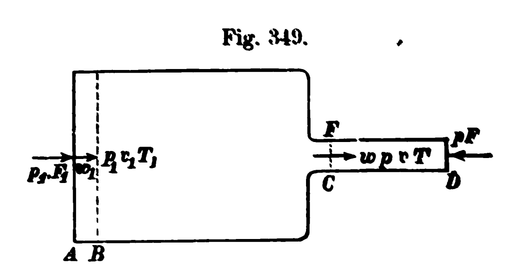
vorhanden; das Gas ist bei Leistung einer Arbeit auf sein eigenes Arbeitsvermögen, d. h. seine eigene Wärme angewiesen, und muss andererseits eine empfangene äussere Arbeit in Wärme umsetzen.

Geht eine Zustandsänderung aber in einem nicht besonders geschützten dünnwandigen Metallgefässe sehr langsam vor sich, so kann man annehmen, das eingeschlossene Gas habe stets annähernd die Temperatur der äusseren Luft. Diese bewirkt dann die erforderliche Zuführung oder Entziehung von Wärmemenge, also eine isothermische Zustandsänderung.

7. Ausfluss der Gase aus Gefässen.

In einem grossen Gefässe (Fig. 349) befinde sich Gas von dem Zustande p_1, v_1, T_1. Bei C finde aus der Öffnung F ein Ausfluss mit der Geschwindigkeit w statt. Der Zustand des Gases in der Öffnung sei p, v, T. Zur Erhaltung des Beharrungszustandes denken wir uns die Rückwand des Gefässes durch einen Kolben von der

Fig. 349.



Grösse F_1 ersetzt, der durch die Kraft $p_1 \cdot F_1$ mit der sehr kleinen Geschwindigkeit w_1 vorwärts bewegt wird, also in der Zeit dt um $AB = w_1 \cdot dt$ vorrückt. Auch nehmen wir an der Öffnung eine Röhre von der Länge $CD = w \cdot dt$ an, in der ein Kolben unter einer Gegenkraft $p \cdot F$ zurückweicht. Dann findet sich im Gefässe zwischen A und B das Massentheilchen m von dem Gewichte

$$mg = \gamma_1 F_1 w_1 dt = \frac{F_1 w_1 dt}{v_1},$$

entsprechend demjenigen in der Röhre zwischen C und D mit

$$mg = \frac{F \cdot w \cdot dt}{v}.$$

Die Zunahme an Arbeitsvermögen in der Zeit dt beträgt, weil w_1 sehr klein gegen w ist: $\frac{m w^2}{2}$.

Die Kräfte $p_1 \cdot F_1$ und $p \cdot F$ leisten gleichzeitig die Arbeit:

$$p_1 \cdot F_1 \cdot w_1 \cdot dt - p \cdot F \cdot w \cdot dt = mg\,(p_1 v_1 - p v) = mg \cdot R\,(T_1 - T).$$

In der Zeit dt erfährt das Gasgewicht mg eine Temperatur-Verminderung $T_1 - T$, für welche man die Gleichungen der adiabatischen Zustandsänderung (s. S. 351) annehmen kann, also

$$1)\qquad \frac{T}{T_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Die dieser Temperatur-Verminderung entsprechende Wärmemenge beträgt nach S. 347 für 1 kg des Gases $c\,(T_1 - T)$, für das Gewicht mg also $mg \cdot c\,(T_1 - T)$, und kommt dem Arbeitsvermögen der Ausströmung zu Gute mit: $mg \frac{c}{A}(T_1 - T)$.

Daher wird die Zunahme an Arbeitsvermögen:

$$\frac{m w^2}{2} = mg \cdot R\,(T_1 - T) + mg \frac{c}{A}(T_1 - T),$$

und darnach

$$\frac{w^2}{2g} = (T_1 - T)\left(R + \frac{c}{A}\right).$$

Mit $\frac{c}{A} = \frac{R}{n-1}$ (Gl. 11, S. 347) und Berücksichtigung der Gl. 1, ergiebt sich also

$$2)\quad \frac{w^2}{2g} = (T_1 - T)\,R\,\frac{n}{n-1} = R\,\frac{n}{n-1}\,T_1\left\{1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right\}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist als die wirksame Druckhöhe zu bezeichnen, welche sich bei Vernachlässigung der Reibung und der sonstigen Widerstände in die Geschwindigkeitshöhe $\frac{w^2}{2g}$ umsetzt.

Die sekundliche Gewichtsmenge des ausströmenden Gases ist nach S. 342 mit Berücksichtigung der Widerstände, wegen $\gamma = 1 : v$,

$$G = \mu \cdot F \cdot \frac{w}{v}.$$

Führt man hierin für w den Werth aus Gl. 2, und nach Gl. 23, S. 351 $v = v_1 \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{n}}$ ein, so wird

$$3)\quad G = \mu \cdot F \sqrt{2gR\,\frac{n}{n-1} \cdot T_1 \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right] \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{v_1^2}}.$$

Hiernach ist G^2 verhältnisgleich mit

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{(n+1)}{n}},$$

ein Ausdruck, der zu einem Maximum wird, für

4) $$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

Hiermit ergiebt sich

5) $$G_{max} = \mu F \sqrt{2g\frac{n}{n+1}\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{2}{n-1}}\frac{R \cdot T_1}{v_1^2}},$$

worin auch $\frac{R \cdot T_1}{v_1^2} = \frac{p_1}{v_1} = \frac{p_1^2}{R T_1}$ gesetzt werden kann.

Mit $n = 1{,}41$, $\frac{1}{n} = 0{,}709$, $\frac{n-1}{n} = 0{,}291$, $\frac{n}{n-1} = 3{,}44$ und $\frac{n}{n+1} = 0{,}585$ wird

6) $$\frac{p}{p_1} = 0{,}5265$$

und für Luft mit $R = 29{,}27$:

7) $$G_{max} = \mu F \cdot 0{,}3972 \frac{p_1}{\sqrt{T_1}}.$$

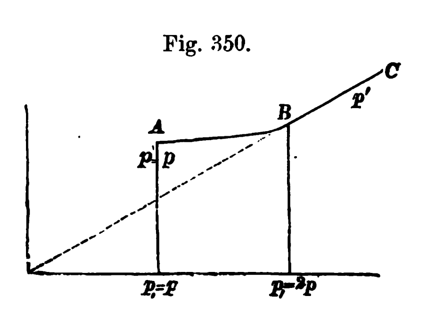
Stellt man sich nun vor, der Druck im Gefässe bliebe unverändert p_1, der Aussendruck p aber nehme ab, so wird nach Gl. 1 auch die Temperatur T der ausströmenden Luft abnehmen und nach Gl. 2 die Geschwindigkeit w zunehmen. Da hierbei nach Gl. 23, S. 351, das Volumen v zunimmt, die Dichte γ sich also vermindert, so wird, trotz des Wachsens der sekundlich ausströmenden Raummenge, das ausströmende Gewicht G nur zunehmen, solange $\frac{p}{p_1} > 0{,}5265$ ist. Bei noch weiterer Abnahme von p wird aber G wieder kleiner, und nach Gl. 3 müsste für $p = 0$, d. h. für die Ausströmung in einen leeren Raum, auch $G = 0$ werden.

In Wirklichkeit trifft dies aber nicht zu; denn nach Gl. 24, S. 351, würde für $p = 0$ zugleich $v = \infty$ (oder $\gamma = 0$), und $T = 0$

werden, — und so weit reicht die Gültigkeit der Zustandsgleichung der Gase nicht; auch trifft die Annahme nicht zu, dass in demjenigen Querschnitt, in welchem die Geschwindigkeit w herrscht, der Druck des ausströmenden Gases gleich dem im Aussenraume stattfindenden Drucke p sei; vielmehr herrscht dort ein Druck $p' > p$.

Über diesen Druck p' hat Professor Fliegner in Zürich Versuche angestellt (s. Civilingenieur 1874). Nimmt der Druck p_1 im Gefässe, von $p_1 = p$ beginnend, allmählich zu, so ist anfangs $p' = p$ (Fig. 350), für $p_1 = 2p$ wird $p' = 0{,}5767\, p_1$, und bleibt dann für noch weiter wachsendes p_1 unverändert $p' = 0{,}5767\, p_1$. Das Gesetz der Veränderlichheit von p' folgt also dem Zuge ABC. Für die schwach gekrümmte Kurve AB kann man annähernd eine Gerade AB setzen.

Fig. 350.



Hiernach wäre

8) $p' = p + 0{,}1534\,(p_1 - p)$ gültig für $p_1 = p$ bis $p_1 = 2p$,

9) $p' = 0{,}5767\, p_1$ gültig für $p_1 > 2p$.

Zur Berechnung der Geschwindigkeit w hat man sonach in Gl. 1 und 2, statt p den Druck p' aus Gl. 8 oder Gl. 9 einzuführen.

Zugleich fand Fliegner, dass die Reibungswiderstände in einem grossen Gefässe verschwindend klein sind, so dass $\varphi = 1$ und $\mu = \alpha$ gesetzt werden kann. (Vergl. S. 342).

Die sekundlich ausfliessende Gewichtsmenge beträgt nach Fliegner's Versuchen:

10)
$$\text{für } p_1 < 2p: \quad G = \alpha F \cdot 0{,}790 \sqrt{\frac{p\,(p_1 - p)}{T_1}},$$
$$\text{für } p_1 > 2p: \quad G = \alpha F \cdot 0{,}395 \frac{p_1}{\sqrt{T_1}}, \text{ (vergl. Gl. 7);}$$

worin p und p_1 in $^{kg}/_{qm}$ einzusetzen sind.

Beispiel: Wie auf S. 343 sei: $p = 735^{mm}$ und $p_1 = 765^{mm}$ Quecksilbersäule, d. h. $p = 735 \cdot 13{,}6 = 9996^{kg}/_{qm}$ und $p_1 = 765 \cdot 13{,}6 = 10404^{kg}/_{qm}$, ferner $T_1 = 283^0$, und $F = 0{,}0001^{qm}$; dann wird, wegen $p_1 < 2p$, nach Gl. 8:

$$p' = 10059, \quad \text{somit} \quad \frac{p'}{p_1} = 0{,}9668.$$

Aus Gl. 1 folgt, mit p' statt p: $\frac{T}{T_1} = 0{,}9668^{0{,}291}$ und $T = 280{,}2^0$, also $(T_1 - T) = 2{,}73^0$ Temperatur-Abnahme.

Es ergiebt damit Gl. 2:

$$w = \sqrt{2g \cdot 29{,}27 \cdot 3{,}44 \cdot 2{,}8} = 74{,}4^{m}/_{s}$$

gegen $78^{m}/_{s}$ nach S. 343.

Die sekundliche Gewichtsmenge ist nach Gl. 10, mit $a = 0{,}65$:

$$G = 0{,}65 \cdot 0{,}0001 \cdot 0{,}79 \sqrt{\frac{9996 \cdot 408}{283}} = 0{,}0063^{kg}/_{s}.$$

gegen $0{,}00637^{kg}/_{s}$ auf S. 343.

Bemerkung. Die Temperatur-Verminderung, welche Luft beim freien Ausströmen aus einem Gefässe erfährt, lässt sich nicht benutzen. — Es wird nämlich die mit grosser Geschwindigkeit ausströmende Luft in dem Aussenraume, in Folge von Reibung, schliesslich wieder zur Ruhe kommen, und dabei wird das der Geschwindigkeit entsprechende Arbeitsvermögen wieder in Wärme umgesetzt.

8. Bewegung der Luft in Röhren.

Die Luft erfährt beim Durchströmen einer Röhre, in Folge des Reibungswiderstandes, eine Verminderung ihres Druckes um Δp.

Wie bei der Bewegung des Wassers (S. 288), eine Widerstandshöhe $z = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}$ eingeführt wurde, so setzt man hier, wenn γ die Dichte der Luft bedeutet, die Druckverminderung

$$\Delta p = \gamma \cdot z = \gamma \cdot \lambda \cdot \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}.$$

Man kann dann auch, wegen $\gamma = \frac{1}{v} = \frac{p}{RT}$, schreiben:

$$1) \qquad \Delta p = \frac{p}{RT} \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}.$$

Nach Versuchen von Prof. Ledoux (Annales des mines 1892, Nov., S. 541) beträgt im Mittel $\lambda = 0{,}0179$ oder abgerundet:

$$\lambda = 0{,}018. \tag{2}$$

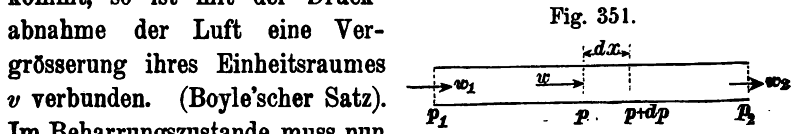
Beispiel: Eine Leitung von $d = 0{,}25$ m Weite und $l = 1000$ m Länge, führe Luft von im Mittel 20° C. ($T = 293°$) mit einer Geschwindigkeit $w = 6$ m/s., aus einem Behälter mit einem Drucke $p_1 = 60\,000$ kg/qm, in einen Tunnel zum Betriebe von Bohrmaschinen. Der Druckverlust der Leitung ist nach Gl. 1:

$$\varDelta p = \frac{60\,000}{29{,}27 \cdot 293}\, 0{,}018 \cdot \frac{1000}{0{,}25} \frac{6^2}{2g} = 924 \text{ kg/qm};$$

am Ende der Leitung beträgt der Druck also noch 59 076 kg/qm.

Wenn man voraussetzt, dass in Folge von Wärmeleitung durch die Röhrenwand, eine Temperaturveränderung der Luft nicht vorkommt, so ist mit der Druckabnahme der Luft eine Vergrösserung ihres Einheitsraumes v verbunden. (Boyle'scher Satz). Im Beharrungszustande muss nun sekundlich das gleiche Luftgewicht $\gamma F w = \frac{F w}{v}$ durch alle Querschnitte der Röhren hindurchströmen. Gelten daher (Fig. 351) p_1, v_1, w_1 für den Anfang, p_2, v_2, w_2 für das Ende und p, v, w für eine beliebige Stelle der Röhre, so ist:

Fig. 351.



$$\frac{w}{v} = \frac{w_1}{v_1} \quad \text{und wegen} \quad \frac{v}{v_1} = \frac{p_1}{p}, \quad w = \frac{w_1 p_1}{p};$$

ferner nach Gl. 1, weil p mit wachsendem x abnimmt,

$$-dp = \frac{p}{RT} \lambda \frac{dx}{d} \frac{w^2}{2g} = \frac{p}{RT} \frac{\lambda}{d} dx \frac{w_1^2}{2g} \frac{p_1^2}{p^2} \quad \text{also} \tag{3}$$

$$-p\,dp = \frac{\lambda}{d} \frac{p_1^2}{RT} \frac{w_1^2}{2g} dx.$$

Dies giebt $\quad p_1^2 - p_2^2 = 2 \frac{\lambda l}{d} \frac{p_1^2}{RT} \frac{w_1^2}{2g}$ oder

$$p_2 = p_1 \sqrt{1 - \frac{2\lambda}{RT} \frac{l}{d} \frac{w_1^2}{2g}}.$$

Ist der Unterschied zwischen p_1 und p_2 gering, so kann man für den Wurzelausdruck die beiden ersten Glieder der binomischen Reihe setzen, und erhält

5) $$p_2 = p_1 \left(1 - \frac{\lambda}{RT} \frac{l}{d} \frac{w_1^2}{2g}\right);$$

dies stimmt, weil $\Delta p = p_1 - p_2$ ist, mit Gl. 1 überein.

Streng genommen, müsste auch noch die zur Vergrösserung der Geschwindigkeit erforderliche Druckhöhe berücksichtigt werden. Dann erhält man, weil einem negativen dp eine negative Druckhöhe dz entspricht: $-\gamma \cdot dz = -dp$, und mit Berücksichtigung der Gl. 3:

$$-dz = -\frac{RT}{p} dp = \lambda \frac{dx}{d} \frac{w^2}{2g} + \frac{d(w^2)}{2g}, \text{ oder wegen } w = w_1 \frac{p_1}{p},$$

$$-dp = \frac{\lambda p}{RT} \frac{dx}{d} \frac{w_1^2}{2g} \frac{p_1^2}{p^2} - \frac{w_1^2}{g} p_1^2 \frac{dp}{p^3} \frac{p}{RT}, \text{ mithin}$$

$$-p\,dp = \frac{\lambda}{RT} \frac{p_1^2}{d} \frac{w_1^2}{2g} dx - \frac{w_1^2 p_1^2}{gRT} \frac{dp}{p} \text{ und}$$

$$p_1^2 - p_2^2 = 2\lambda \frac{l}{d} \frac{p_1^2}{RT} \frac{w_1^2}{2g} + 4 \frac{p_1^2}{RT} \frac{w_1^2}{2g} \mathrm{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

Hieraus wird

6) $$\frac{p_2^2}{p_1^2} = 1 - \frac{w_1^2}{2g} \frac{1}{RT_1} \left(2\lambda \frac{l}{d} + 4\,\mathrm{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right).$$

Bemerkung. In Gl. 6 ist der letzte Summand in der Klammer gegen den ersten meist verschwindend klein; so wird mit den Werthen des Beispiels auf S. 358

$$\frac{p_1}{p_2} = \text{rund } \frac{60}{59} = 1{,}017, \quad \mathrm{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 0{,}017,$$

und der Klammerausdruck:

$$\left(2 \cdot 0{,}018 \cdot \frac{1000}{0{,}25} + 4 \cdot 0{,}017\right) = (144 + 0{,}068).$$

Bei Vernachlässigung der zweiten Klammergrösse übergeht aber Gl. 6 in Gl. 4.

Gl. 4 liefert mit den Zahlen desselben Beispiels:

$$p_2 = 60\,000 \sqrt{1 - \frac{2 \cdot 0{,}018}{29{,}27 \cdot 293} \frac{1000}{0{,}25} \frac{6^2}{19{,}62}} = 59\,070 \text{ kg/qm},$$

gegen $p_2 = 59\,076$ kg/qm nach Gl. 1.

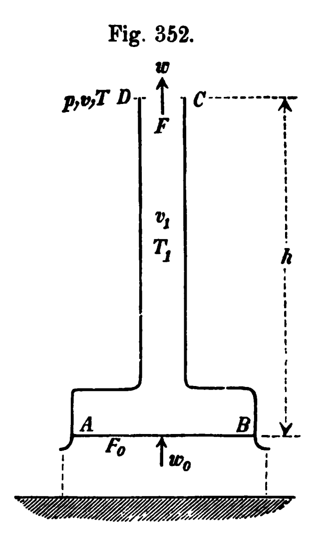
Es genügt daher für die meisten Fälle die einfache Gl. 1.

9. Wirkung der Schornsteine.

Die Wirkung der Schornsteine beruht auf der Verminderung der Dichte der Luft oder der Gase durch Erwärmung. — Am oberen Ende des Schornsteins (Fig. 352) habe die Aussenluft den Zustand p, v, T. In dem Raume $ABCD$ sei durch Heizung oder dgl. die Temperatur auf den Mittelwerth T_1 gebracht. Die Dichte $\gamma = {}^1/_v$ der äusseren Luft gelte auf die Schornsteinhöhe h als überall gleich (s. S. 215), dann ist nach Gl. 18, S. 350 auch im Schornsteine der Einheitsraum durchschnittlich $v_1 = v \frac{T_1}{T}$. Der Druck der äusseren Luft in der Höhe AB beträgt daher:

$$p + \frac{h}{v}.$$

Fig. 352.



Der Raum unterhalb AB stehe mit der äusseren Luft in freier Verbindung.

Bezeichnen wir, wie S. 353, mit mg das Luftgewicht, welches in der Zeit dt durch jeden Querschnitt des Schornsteins geht, so ist

$$1) \qquad mg = \frac{F_0 \cdot w_0 \cdot dt}{v_1} = \frac{F \cdot w \cdot dt}{v_1}.$$

Die Zunahme an Arbeitsvermögen während der Zeit dt beträgt (ähnlich wie auf S. 241): $m\frac{w^2}{2} - m\frac{w_0{}^2}{2}$, wovon aber $m \cdot \frac{w_0{}^2}{2}$ wegen der Kleinheit von w_0 vernachlässigt werden kann.

Die Arbeit der Schwere ist in diesem Falle negativ: $= -mgh$, weil die Masse m aufsteigt und oben aus dem Schornsteine tritt. Der Druck gegen AB leistet die Arbeit:

$$\left(p + \frac{h}{v}\right) F_0 \cdot w_0 \cdot dt = \left(p + \frac{h}{v}\right) \cdot mg \cdot v_1,$$

und der Druck gegen CD dagegen die Arbeit:

$$-p \cdot F \cdot w \cdot dt = -p \cdot mg \cdot v_1.$$

Daher ist

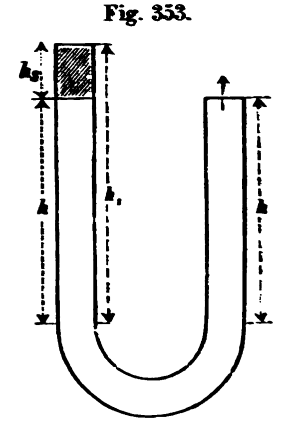
$$m\frac{w^2}{2} = -mg \cdot h + \left(p + \frac{h}{v}\right) mg \cdot v_1 - pmg \cdot v_1 \quad \text{oder}$$

2) $$\frac{w^2}{2g} = h\left(\frac{v_1}{v} - 1\right) = h\left(\frac{T_1}{T} - 1\right) = h_s.$$

Dies ist die der ideellen Austrittsgeschwindigkeit entsprechende wirksame Saughöhe oder Auftriebhöhe des Schornsteins. Man kann sich von ihr leicht eine Vorstellung machen: Betrachtet man eine Luftsäule von der Temperatur T und der Höhe h (Fig. 353) und dehnt diese durch Erwärmung auf T_1 der Höhe nach aus, so bekommt sie die Höhe $h_1 = h\frac{T_1}{T}$. Es ist dann $(h_1 - h)$ die wirksame Saughöhe h_s.

In Gl. 2 sind die beträchtlichen Widerstände unberücksichtigt gelassen, welche die Rauchgase auf ihrem Wege durch den Rost, die Feuerzüge, den Zuleitungskanal (Fuchs) und den Schornstein selbst erleiden. Alle diese Widerstände vermindern die wirksame Saughöhe h_s um eine Widerstandshöhe z (vgl. S. 255), so dass für die wirkliche Austrittsgeschwindigkeit an Auftriebhöhe verbleibt:

Fig. 353.



3) $$\frac{w^2}{2g} = h_s - z = h\left(\frac{T_1}{T} - 1\right) - z.$$

Für die Berechnung der Widerstandshöhe z, als Theil der Geschwindigkeitshöhe $\frac{w^2}{2g}$, kommen folgende Widerstandsziffern in Betracht:

a) für die Reibung im Schornstein, dessen Höhe h und dessen Querschnitt gewöhnlich rund oder ein regelmässiges Vieleck vom Durchmesser d ist: $\lambda\frac{h}{d}$.

Für unberusstes Mauerwerk beträgt die Reibungsziffer $\lambda = 0{,}03$ und für berusstes Mauerwerk $\lambda = 0{,}04$.

b) Für die Zuleitungskanäle, deren Länge l und deren mittlerer Querschnitt F mit dem Umfange u ist: $\beta \cdot \frac{u}{F} \cdot l$.

Für unberusstes Mauerwerk beträgt $\beta = 0{,}0075$ und für berusstes Mauerwerk $\beta = 0{,}01$.

c) Bei Richtungsänderungen in den Feuerkanälen, die an den Schornstein anschliessen, gelten nach Rietschel*):

für ein scharfes rechtwinkliges Knie: $\zeta = 1{,}5$; für ein abgerundetes rechtwinkliges Knie: $\zeta = 1{,}0$; für ein Knie von 135^0: $\zeta = 0{,}6$; für plötzliche Richtungsänderungen um 180^0: $\zeta = 1{,}5$ bis $2{,}5$.

d) Der Rost mit der Brennstoffschicht bietet den bedeutendsten Widerstand mit: $\varrho = 6$ bis 12, je nach der Art des Rostes und des Brennstoffes.

Es ist somit die ganze Widerstandshöhe

$$4) \qquad z = \frac{w^2}{2g}\left(\lambda \cdot \frac{h}{d} + \beta \cdot \frac{u}{F} l + \Sigma\zeta + \varrho\right),$$

und daher schliesslich nach Gl. 3:

$$5) \qquad \frac{w^2}{2g}\left(1 + \lambda \cdot \frac{h}{d} + \beta \cdot \frac{u}{F} l + \Sigma\zeta + \varrho\right) = h_s = h\left(\frac{T_1}{T} - 1\right).$$

Hiernach kann für eine gegebene Schornsteinhöhe h die Austrittsgeschwindigkeit w der Rauchgase, oder umgekehrt für eine geforderte Austrittsgeschwindigkeit w (nicht unter 4^m) die erforderliche Schornsteinhöhe h berechnet werden.

Beispiel: Ein cylindrischer Schornstein von $h = 30^m$ Höhe habe kreisförmigen Querschnitt von $d = 0{,}6^m$ Weite. An den Schornstein schliessen sich 30^m lange Feuerkanäle vom Querschnitt $1^m \times 0{,}3^m$, in denen zwei abgerundete Umbiegungen von 180^0 ($\zeta = 1{,}5$) und ein scharfes rechtwinkliges Knie ($\zeta = 1{,}5$) vorkommen. Die Widerstandsziffer des Rostes sei $\rho = 9$. Die mittlere innere Temperatur betrage $T_1 = 200 + 273 = 473^0$, die äussere $T = 10 + 273 = 283^0$. Es soll die Ausströmungsgeschwindigkeit berechnet werden.

Die wirksame Saughöhe beträgt nach Gl. 2:

$$h_s = 30\left(\frac{473}{283} - 1\right) = 20{,}14^m,$$

die Widerstandshöhe nach Gl. 4, für berusstes Mauerwerk:

$$z = \frac{w^2}{2g}\left(0{,}04 \cdot \frac{30}{0{,}6} + \frac{0{,}01 \cdot 2\,(1 + 0{,}3) \cdot 30}{0{,}3} + 2 \cdot 1{,}5 + 1{,}5 + 9{,}0\right) = 18{,}1\,\frac{w^2}{2g}.$$

*) Vergl. G. Lang „Der Schornsteinbau".

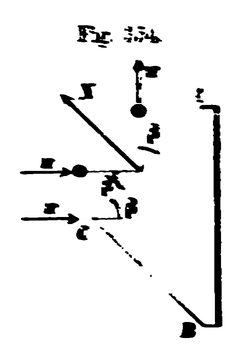
Daher wird nach Gl. 7): $\frac{v^2}{2g}$ [illegible] und

$$v = \sqrt{\frac{2g \cdot [illegible]}{[illegible]}} = [illegible] \text{ m}$$

Im Sommer mit $T = 300°$ wird $v =$ [illegible] m.

10. Widerstand der Luft gegen bewegte fremde Körper: Druck des Windes gegen fremde Körper.

Wird eine ebene, etwa kreisförmige Fläche AB mit niedrigem Rand (Fig. 354) einem mit der Geschwindigkeit w rechtwinklig dagegen strömenden Wind ausgesetzt, so bildet sich, wie Ober-Ingenieur Friedr. Ritter v. Loessl (in dessen Werk „Die Luftwiderstands-Gesetze“, Wien 1896) durch Versuche gefunden hat, vor der Platte ein ruhender Luftkörper, der sog. Stauhügel ABC. Die Seitenflächen desselben bilden mit der Plattenebene an allen Stellen Winkel von $90° - \beta$. Der Stauhügel hat bei kreisförmiger Platte die Form eines Kegels, bei quadratischer Platte die Form einer Pyramide, bei rechteckiger Platte diejenige eines Walmdaches, kurz in allen Fällen diejenige Form, in welcher ein Sandkörper mit dem Böschungswinkel (Reibungswinkel) $90° - \beta$ auf der wagerecht liegenden Platte verbleiben würde, wenn Sand im Übermaß darauf geschüttet wird, bis er nach allen Seiten abfliesst.


Fig. 354.

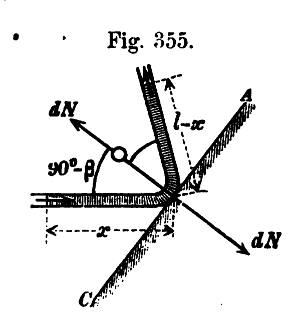
v. Loessl hat gefunden, dass der Winkel $\beta = 45°$ ist.

An der Mantelfläche des ruhenden Lufthügels prallen die bewegten Lufttheilchen elastisch ab. Nach der Lehre vom schiefen elastischen Stoße (s. S. 161) prallen die Lufttheilchen mit derselben Geschwindigkeit w ab, mit der sie dagegen strömten, und zwar in einer Richtung, die von der Rechtwinkligen zur Stauhügelfläche um den Winkel $90° - \beta$ abweicht. Für $\beta = 45°$ prallen demnach die Lufttheilchen parallel zur Platte von dem Stauhügel ab. (Fig. 354).

Der Druck, der bei diesem Abprallen auf den Stauhügel ausgeübt wird, lässt sich nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes (1. Theil, 2. Aufl., S. 143) berechnen.

In einem Knierohre (Fig. 355) vom Querschnitte dF, dessen Schenkel in der Richtung der zuströmenden und abprallenden Lufttheilchen liegen, befinde sich eine Flüssigkeit, welche in der Röhre eine Länge l einnimmt, mit den Längen x und $l - x$ auf die beiden Schenkel vertheilt. Bezeichnet man den rechtwinkligen Abstand des Schwerpunktes dieser Flüssigkeit von der Fläche AC mit y_0, so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte

Fig. 355.



$$y_0 \cdot l = x \cdot \frac{x}{2} \sin\beta + (l - x)\frac{l - x}{2} \sin\beta$$

$$= \sin\beta\left(x^2 + \frac{l^2}{2} - l x\right).$$

Die Differentiation dieser Gleichung ergiebt

$$l \cdot dy_0 = \sin\beta(2x \cdot dx - l \cdot dx).$$

Schreitet aber die Flüssigkeit in der Röhre mit der Geschwindigkeit w fort, so ist $wdt = - dx$, mithin $dx = - w \cdot dt$, also

$$l \cdot \frac{dy_0}{dt} = - \sin\beta(2xw - lw);$$

aus nochmaliger Differentiation folgt

$$l \cdot \frac{d^2 y_0}{dt^2} = 2 \sin\beta \cdot w^2 \quad \text{und darnach}$$

$$\frac{\gamma}{g} dF \cdot l \cdot \frac{d^2 y_0}{dt^2} = 2 \frac{\gamma}{g} dF \sin\beta \cdot w^2.$$

Bezeichnet man die in jeder Sekunde durch einen Röhrenquerschnitt strömende Flüssigkeits-Masse $\frac{\gamma}{g} dF \cdot w$ mit m, so wird

1) $$\frac{\gamma}{g} dF \cdot l \cdot \frac{d^2 y_0}{dt^2} = 2 m \sin\beta \cdot w.$$

Die linke Seite der Gl. 1 enthält die Masse der gesammten betrachteten Flüssigkeit, multiplicirt mit der Seitenbeschleunigung ihres Schwerpunktes in der Richtung rechtwinklig zur Fläche AC. Dies ist (nach 1. Theil, 2. Aufl., S. 143) gleich der Summe aller

äusseren Kräfte in derselben Achsenrichtung, d. h. gleich dem Widerstande dN der Röhre in der Richtung rechtwinklig zur Fläche AC. Umgekehrt wird dN als Druck auf die Fläche AC übertragen.

Würde die Röhre vom Querschnitte dF sich geradlinig durch die Fläche AC fortsetzen (Fig. 356), so würde sie aus dieser Fläche ein Stück $\frac{dF}{\sin\beta}$ herausschneiden. Die Kraft $2\,m\sin\beta\cdot w$ (Gl. 1), welche auf die Fläche $\frac{dF}{\sin\beta}$ kommt, erzeugt für die Flächeneinheit einen Druck

2) $$\mathfrak{p} = \frac{2\,m\sin^2\beta\cdot w}{dF} = 2\frac{\gamma}{g}w^2\sin^2\beta.$$

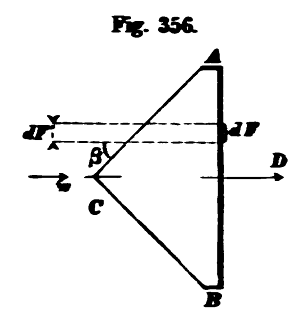
Dieser Druck herrscht an allen Stellen des in Ruhe befindlichen Stauhügels; mithin überträgt der Stauhügel auf die Platte von der Grösse F (Fig. 356) eine Druckkraft

3) $$D = 2\frac{\gamma}{g}\sin^2\beta\cdot w^2\cdot F.$$

Weil nun für den vorliegenden Fall $\beta = 45^\circ$ gefunden wurde, so ist $\sin^2\beta = 1/2$ und

4) $$D = \frac{\gamma}{g}Fw^2.$$

Fig. 356.



Diese Formel hat v. **Loessl** bei seinen Versuchen bestätigt gefunden für ebene Platten, die **mit einem erhöhten Rande** umgeben sind, sowie auch für gekrümmte Flächen, z. B. halbe Hohlkugeln, deren **hohle Seite** dem Winde zugekehrt ist.

Gl. 4 giebt den grössten möglichen Winddruck auf eine Fläche, deren Projektion in der Richtung des Windes die Grösse F hat, und gilt auch für unebene Flächen, wenn nur die Unebenheiten nicht so stark hervortreten, dass sie die Bildung des Stauhügels beeinträchtigen. Der **Rauhigkeitsgrad** der Fläche hat daher höchstens in der Nähe der Ränder Einfluss auf die Grösse des Winddrucks.

Dagegen vermindert sich der Winddruck auf Flächen ohne erhöhte Ränder; v. Loessl fand hierfür:

5) $$D = \varkappa \cdot \frac{\gamma}{g} F \cdot w^2,$$

mit $\varkappa = 0{,}83$ für ebene Kreisflächen,

$\varkappa = 0{,}86$ „ „ Quadratflächen,

$\varkappa = 0{,}92$ „ „ Rechteckflächen vom Seitenverhältnis 1 : 2,

$\varkappa = 0{,}94$ „ „ „ „ „ 1 : 4.

Wird der Winddruck von der Fläche F eines geraden, nicht sehr langen, prismatischen Körpers, anstatt von einer Platte F, aufgenommen, so bleibt Gl. 5 ebenfalls gültig.

Eine Druckverminderung oder eine Saugwirkung an der Rückseite der Fläche hat v. Loessl nicht gefunden; doch bedürfen über diesen Punkt seine Versuche noch einer Nachprüfung.

Druck gegen schief gestellte Flächen. Bildet die Platte mit der Windrichtung den Winkel α, so entsteht nach v. Loessl's Versuchen ebenfalls ein Stauhügel, dessen Neigungswinkel β gegen die Windrichtung aber von α abhängt. Es hat sich nämlich gezeigt, dass bei einer bestimmten Neigung α der Platte gegen die Windrichtung (Fig. 357), die Neigung β der Seitenflächen des Stauhügels gegen die Windrichtung ringsum zwar dieselbe ist, dass β aber mit α zu- und abnimmt. Den beobachteten Werthen genügt die Beziehung:

6) $$\operatorname{tg}\beta = \sin\alpha,$$

Fig. 357.

so dass für

$\alpha = 90^0$ $\beta = 45^0$

$\alpha = 60^0$ $\beta = 41^0$

$\alpha = 35^0$ $\beta = 30^0$

$\alpha = 30^0$ $\beta = 26^1/_2{}^0$

$\alpha = 0^0$ $\beta = 0^0$ wird.

Nach Gl. 6 ist β leicht zeichnerisch zu ermitteln (Fig. 358).

Ist nun F die Grösse der schief gestellten Fläche, so ist ihre Projektion in der Richtung des Windes $F \sin \alpha$. Wendet man daher die Entwickelung (S. 364) auf diesen Fall sinngemäss an, so ergiebt sich für den Druck $\mathfrak{p}$ im Stauhügel (Fig. 357) wiederum der Werth der Gl. 2:

Fig. 358.

7) $$\mathfrak{p} = 2 \frac{\gamma}{g} w^2 \sin^2 \beta;$$

mithin erhält auch die Platte F die rechtwinklige Druckkraft

8) $$N = 2 \frac{\gamma}{g} F w^2 \sin^2 \beta.$$

Da nun $$\sin^2 \beta = \operatorname{tg}^2 \beta \cos^2 \beta = \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}$$

ist, so wird mit $\operatorname{tg} \beta = \sin \alpha$ (Gl, 6):

9) $$N = 2 \frac{\gamma}{g} \frac{F w^2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}.$$

v. Loessl gelangt dagegen auf andere Weise zu der Formel:

10) $$N = \frac{\gamma}{g} F w^2 \sin \alpha,$$

so dass sich die Werthe $\frac{2 \cdot \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$ und $\sin \alpha$ gegenüberstehen.

Für verschiedene Winkel α liefern diese Werthe folgende Ergebnisse:

Winkel	$\frac{2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$	$\sin \alpha$
$\alpha = 90^0$	1	1
$\alpha = 60^0$	0,857	0,866
$\alpha = 45^0$	0,667	0,707
$\alpha = 35^0$	0,494	0,574
$\alpha = 30^0$	0,400	0,500
$\alpha = 20^0$	0,210	0,342
$\alpha = 10^0$	0,059	0,174
$\alpha = 0^0$	0	0

Hiernach ergiebt Gl. 10 (v. Loessl) durchwegs grössere Winddrücke als Gl. 9.

Die Unterschiede sind bei kleinem Winkel α (unter 35^0) erheblich, dagegen bei grösserem Winkel α (über 35^0) nur gering, weshalb sich für $\alpha > 35^0$ die Anwendung der einfacheren Gl. 10 (v. Loessl) empfiehlt.

Beispiel: Der Winddruck D gegen einen Schornstein oder Pfeiler, dessen Grundriss ein Quadrat von der Seite a und dessen Höhe h ist, beträgt:

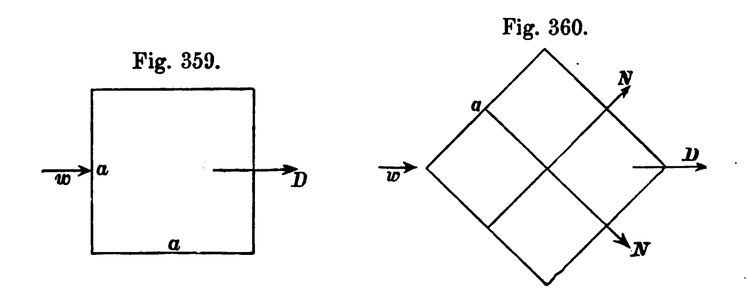


Fig. 359. Fig. 360.

1) wenn der Wind die eine Seitenfläche rechtwinklig trifft (Fig. 359) nach Gl. 4:

$$D = \frac{\gamma}{g} a h w^2,$$

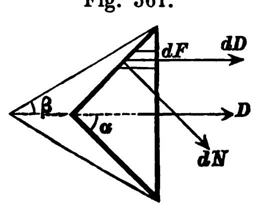
2) wenn der Wind in der Richtung der Diagonale d. h. „über Eck" weht (Fig. 360), wobei jede der beiden getroffenen, schrägen Seitenflächen $a \cdot h$ nach Gl. 10 den Normaldruck N bekommt, und beide N die Mittelkraft D geben:

$$D = N\sqrt{2} = \frac{\gamma}{g} a h w^2 \, 0{,}707 \cdot \sqrt{2} = \frac{\gamma}{g} a h w^2.$$

Der Winddruck ist also in beiden Fällen gleich gross.

Druck gegen eine kegelförmige Fläche. Weht der Wind in der Achsenrichtung des Kegels gegen dessen Spitze und ist α der Winkel der Kegelseiten gegen die Achse (Fig. 361), so bildet sich vor dem Kegel ebenfalls ein Stauhügel mit dem halben Winkel β an der Spitze. Der Druck in diesem Staukegel wird dann wie in Gl. 2 gefunden,

Fig. 361.



$$\mathfrak{p} = 2 \frac{\gamma}{g} w^2 \sin^2 \beta.$$

Nach Gl. 8 und Gl. 10 kann (wenn $\alpha > 35^0$ ist) für ebene Flächen $2 \sin^2 \beta = \sin \alpha$ gesetzt werden, so dass

11) $$\mathfrak{p} = \frac{\gamma}{g} w^2 \sin \alpha$$

wird. Ist nun F die Grundfläche des Kegels, so entspricht einem Theilchen $\frac{dF}{\sin \alpha}$ der Mantelfläche eine Projektion dF in der Grundfläche. Auf die Mantelfläche $\frac{dF}{\sin \alpha}$ kommt dann ein Normaldruck $dN = \mathfrak{p} \cdot \frac{dF}{\sin \alpha}$, der in der Windrichtung die Seitenkraft

$$dD = dN \sin \alpha = \mathfrak{p} \cdot dF$$

liefert. Sonach ist der gesammte Winddruck auf den Kegel, wenn man die für ebene Flächen geltende Gl. 11 auf die Theilchen des Kegelmantels anwendet,

12) $$D = \mathfrak{p} F = \frac{\gamma}{g} \cdot F w^2 \sin \alpha .$$

Nach v. Loessl's Versuchen ist D thatsächlich etwas kleiner, nämlich

13) $$D = 0{,}83 \frac{\gamma}{g} F w^2 \sin \alpha . \quad \text{(Vergl. Gl. 5)}.$$

Diese Formel gilt auch für ein cylindrisches Geschoss mit kegelförmiger Zuspitzung, aber nur, wenn $\alpha > 35^0$ ist (s. S. 368).

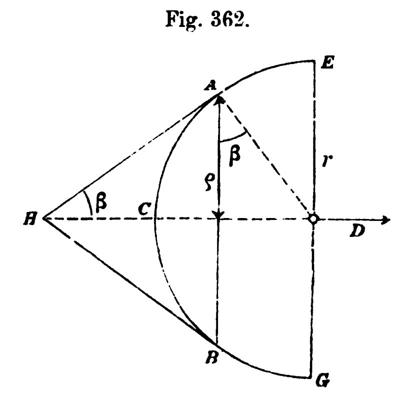
Für $\alpha < 30^0$ führt die obige Annahme, dass $2 \sin^2 \beta = \sin \alpha$ gesetzt werden könne, zu dem widersinnigen Ergebnisse $\beta > \alpha$.

Druck gegen eine Cylinderfläche. Für diesen Fall hat v. Loessl die Form des Staubügels nicht untersucht. Da aber aus der Neigung β der Seitenfläche des Stauhügels gegen die Windrichtung, der Druck im Stauhügel nach Gl. 2 zu $\mathfrak{p} = 2 \frac{\gamma}{g} w^2 \sin^2 \beta$ folgt, und $\mathfrak{p}$ an allen Stellen des Hügels den gleichen Werth haben muss, so muss auch die Neigung der Oberfläche des Stauhügels gegen die Windrichtung an allen Stellen die gleiche sein.

Für einen Kreis-Cylinder vom Halbmesser r und von der Höhe h mit lothrechter Achse, stellt sich im Grundrisse der Stauhügel

nach Fig. 362 vor den Cylinder; derjenige Theil der Mantelfläche des Cylinders, gegen welche der Stauhügel drückt, hat in der Windrichtung eine rechtwinklige Projektion $F_x = AB \cdot h = 2\varrho \cdot h = 2r\cos\beta \cdot h = F \cdot \cos\beta$, wenn $F = 2r \cdot h$ den Achsenschnitt des Cylinders bezeichnet. Es wird dann die Druckkraft in der Windrichtung nach Gl. 3

Fig. 362.



$$D = \mathfrak{p} \cdot F_x \tag{14}$$
$$= 2\frac{\gamma}{g}w^2 \sin^2\beta F \cos\beta.$$

Die Grösse dieser Kraft hat v. Loessl zu

$$D = \frac{2}{3}\frac{\gamma}{g}w^2 F \tag{15}$$

gefunden (vgl. S. 340 für den Druck strömenden Wassers), wornach

$$2\frac{\gamma}{g}w^2 \sin^2\beta\cos\beta = \frac{2}{3}\frac{\gamma}{g}w^2 \quad \text{oder}$$

$$\sin^2\beta\cos\beta = {}^1/_3$$

wird, Dieser Gleichung entspricht rund

$$\beta = 45^0, \tag{16}$$

weil für diesen Winkel

$$\sin^2\beta\cos\beta = {}^1/_2 \cdot 0{,}707 = 0{,}3535$$

ist, was von $^1/_3$ nur wenig abweicht.

Die Seitenflächen AE und BG, die von dem Winde unmittelbar getroffen werden, liefern zu D einen so geringen Beitrag, dass er vernachlässigt werden kann.

Ein Halbcylinder erfährt daher, wenn er mit der krummen Fläche dem Winde entgegengestellt wird, nach Gl. 15 nur etwa $^2/_3$ so viel Druckkraft, als wenn er (Gl. 4) mit der ebenen Fläche dem Winde rechtwinklig zugekehrt ist.

Druck gegen eine Kugelfläche. In diesem Falle bildet sich vor der Kugel ein Staukegel, welcher im Grundriss der Fig. 362 entspricht, mit dem Drucke

$$\mathfrak{p} = 2\frac{\gamma}{g}w^2\sin^2\beta;$$

die von diesem Drucke getroffene Kugelhaube ACB hat die Projektionsfläche

$$F_x = \varrho^2\pi = r^2\cos^2\beta\pi = F\cdot\cos^2\beta,$$

wenn F die Fläche des Kugeldurchschnittes ist. Daher wird die auf die Kugel ausgeübte Windkraft

17) $$D = \mathfrak{p}\cdot F_x = 2\frac{\gamma}{g}Fw^2\sin^2\beta\cdot\cos^2\beta.$$

Durch Versuche hat v. Loessl gefunden

18) $$D = \frac{1}{3}\frac{\gamma}{g}Fw^2, \quad \text{so dass}$$

$$\sin^2\beta\cos^2\beta = \frac{1}{6}, \quad \text{also} \quad \sin 2\beta = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

wird. Dies giebt

19) $$\beta = 27^0 22'.$$

Die Schlankheit dieses Kegels ist überraschend; $\beta = 45^0$ würde $D = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{g}Fw^2$ liefern, wie bei strömendem Wasser (S. 340).

Eine Halbkugel erfährt daher, wenn sie mit der gewölbten Fläche dem Wind entgegengestellt wird, nach Gl. 18 nur etwa $^1/_3$ so viel Windkraft, als wenn sie (Gl. 4) mit der ebenen (oder auch hohlen) Fläche dem Winde rechtwinklig zugekehrt ist.

Beispiel 1: Für eine ebene, dem Winde rechtwinklig entgegenstehende Platte von der Fläche $F = 1^{qm}$ ist nach Gl. 4 der Winddruck $\mathfrak{p} = \frac{\gamma}{g}w^2$. Bei 10° C. Luftwärme ergiebt sich $\gamma = 1{,}29\cdot\frac{273}{283} = 1{,}24$, $\frac{\gamma}{g} = 0{,}127$, also rund

20) $$\mathfrak{p} = 0{,}13\cdot w^2.$$

Demnach wird für:

mäfsigen Wind	mit $w = 5^m$:	$\mathfrak{p} = 3$	$^{kg}/_{qm}$,
frischen Wind	„ $w = 10^m$:	$\mathfrak{p} = 13$	„
starken Wind	„ $w = 17^m$:	$\mathfrak{p} = 38$	„
Sturm	„ $w = 25^m$:	$\mathfrak{p} = 81$	„
Orkan	„ $w = 35^m$:	$\mathfrak{p} = 159$	„
stärksten Orkan	„ $w = 50^m$:	$\mathfrak{p} = 325$	„ .

Bemerkung. Bei der Berechnung der Standsicherheit von Bauwerken kommt in Frage, welchen grössten Windstärken das Bauwerk wahrscheinlich ausgesetzt sein wird. Als Mittelwerth kann für Deutschland

21) $$\mathfrak{p} = 150\ ^{kg}/_{qm}$$

angenommen werden; in der Nähe der Meeresküste kann der Grösstwerth aber auf das Doppelte bis $\mathfrak{p} = 300\ ^{kg}/_{qm}$ steigen.

Beispiel 2: Wie hoch darf eine hölzerne Säule von $r = 0{,}3^{m}$ Halbmesser sein, damit sie bei einem Winddrucke $\mathfrak{p} = 150\ ^{kg}/_{qm}$ an der Grenze der Standsicherheit sei (Fig. 363). Es ist:

$$F = 2r \cdot h = 0{,}6 \cdot h,$$

die Windkraft nach Gl. 15

$$D = \frac{2}{3} \cdot 150 \cdot 0{,}6\,h,$$

das Gewicht der Säule bei einer Dichte $\gamma_1 = 750$,

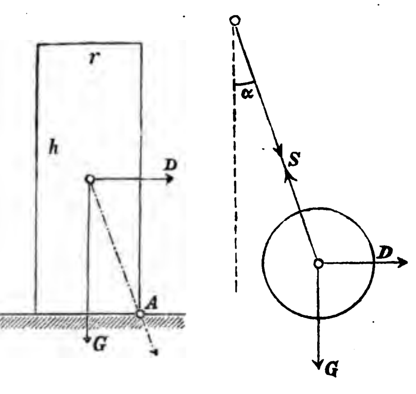
$$G = 0{,}3^2\pi \cdot h \cdot 750\,.$$

Für den Grenzzustand der Ruhe ist (nach 1. Theil, 2. Aufl., S. 169)

$$D \cdot \frac{h}{2} = G \cdot 0{,}3\,, \quad \text{also}$$

$$h = \frac{0{,}6\,G}{D} = 2{,}12^{m}.$$

Fig. 363. Fig. 364.



Beispiel 3: Eine Holzkugel vom Halbmesser $r = 0{,}2^{m}$ und der Dichte $\gamma_1 = 750$ sei an einem Faden aufgehängt (Fig. 364). Bei welcher Neigung α des Fadens gegen die Lothrechte wird Gleichgewicht herrschen, wenn die Kugel ausser ihrem Gewicht einen Winddruck $\mathfrak{p} = 200\ ^{kg}/_{qm}$ erfährt?

Es ist nach Gl. 18

$$D = \frac{1}{3} \cdot 200 \cdot 0{,}2^2\pi, \quad \text{ferner} \quad G = 750 \cdot \frac{4}{3} \cdot 0{,}2^3\pi\,,$$

daher $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{D}{G} = \frac{1}{3}\,.$$

Alphabetisches Verzeichnis und Bedeutung der in den Formeln benutzten Buchstaben unter Hinweis auf die erklärenden Seiten des Buches.

A Auflagerdruck der linken Endstütze. 29.
A Auftrieb der Luft. 216.
A Auftrieb des Wassers. 194.
A Wärmewerth der Arbeitseinheit. 345.
B Auflagerdruck der rechten Endstütze. 29.
C Auflagerdruck der Mittelstütze. 59.
D Druck eines Wasserstrahles. 280.
D Druckfestigkeit. 7.
D Druck strömenden Wassers. 336.
D Spannkraft einer Strebe eines Fachwerkes. 78.
D Winddruck. ; 365.
E Elasticitätsmaſs. 5.
F Ausflussöffnung. 239.
F mit Flüssigkeit erfüllter Querschnitt einer Röhre oder eines Kanales. 287, 301.
F Querschnitt eines Stabes. 6.
F_0 Wasserspiegelfläche eines Gefässes. 240.
F_1 und F_2 Wasserspiegelfläche im Ober- und Unterwasser bei verbundenen Gefässen. 266.
G Eigengewicht eines Körpers oder Körpertheiles. 14.
G Gleitmaſs. 16.
G^1 Gewicht der Nebentheile des Luftballons. 217.
H Höhe des Wasserspiegels über der Unterkante einer Seitenöffnung. 244.
H Polabstand des Kraftecks. 31.
H Stauhöhe. 319.
J Trägheitsmoment eines Querschnitts. 22.
J_0 polares Trägheitsmoment eines Querschnitts. 69.
K äussere Kraft. 4.
M Masse eines Körpers. 97.
O Spannkraft im Obergurt eines Fachwerks. 77.
P Einzellast. 29.
Q Gewicht. 111.
Q Querkraft. 21.
Q scheinbares Gewicht eines von Flüssigkeit umgebenen Körpers. 195.
Q sekundliche Ausflussmenge in ^{cbm}. 244, 250.
Q Wärmemenge. 344.
R Massenkraft der Masseneinheit. 235.
R Reacktion ausfliessenden Wassers. 276.
R Ziffer der Zustandsgleichung der Gase. 219, 345.

S innere Spannkraft. 2.
T absolute Temperatur, 220.
T_1 absolute Temperatur des Gases in einem Gefässe. 341.
T_1 absolute Temperatur in einem Schornstein. 360.
U Spannkraft im Untergurt eines Fachwerks. 77.
V Rauminhalt eines Stabes. 108.
V Spannkraft eines Ständers eines Fachwerks. 77.
WE Wärmeeinheit. 343.
X, Y, Z Massenkraft der Masseneinheit. 236.
Z Zugfestigkeit. 6.

a Abstand einer Last vom linken Auflager eines Balkens. 29.
at Atmosphäre = 1 kg/qcm. 8.
b Abstand einer Last vom rechten Auflager eines Balkens. 29.
b Bodenbreite eines Kanals. 310.
b Breite eines Körpers. 202.
b Durchflussbreite. 320, 323.
c Geschwindigkeit des zuströmenden Wassers. 320.
c und c_1 Geschwindigkeiten vor dem Stofse. 136.
c Specifische Wärme bei unveränderlichem Rauminhalte. 343.
c_1 specifische Wärme bei gleichbleibendem Drucke. 343.
cm Centimeter. 8.
d Breite. 24.
d Druckspannung an der Elasticitätsgrenze. 7.
d Durchmesser eines Kolbens. 171.
d Durchmesser eines Nietes. 17.
d Röhrenweite. 287.
e Abstand der am stärksten gespannten Stelle eines Querschnitts von der Nulllinie. 19.
e Abstand des Schwerpunkts eines Schiffes von dem Schwerpunkte seiner Verdrängung. 198.

e_1 Abstand des Schwerpunkts von der Drehachse. 152.
f Durchbiegung. 46.
f Reibungsziffer. 183.
g Fallbeschleunigung. 99.
h Höhe eines Körpers. 202.
h Höhe eines Querschnitts. 24.
h Höhe des Wasserspiegels über der Oberkante einer Seitenöffnung. 244.
h Schornsteinhöhe. 360.
h wirksame Druckhöhe. 243.
h_0 dem Atmosphärendruck gleichwerthige Flüssigkeitssäule. 226.
h_2 Wehrhöhe. 320.
k Geschwindigkeitshöhe des Zuflusses. 320.
k Stofsziffer. 137, 139.
kg Kilogramm. 8.
kg/qcm Kilogramm für 1 Quadratcentimeter. 8.
l Länge eines Stabes, eines Balkens. 4, 27.
l Röhrenlänge. 287.
l = log nat.
Δl elastische Verlängerung. 5.
m Massentheilchen. 235.
$n = c_1 : c$. 347.
n Knickungsfaktor. 66.
m, n Rauhigkeitsziffern. 304.
p Belastung der Längeneinheit. 28.
p Beschleunigung eines Körpers. 97.
p Druck an der Mündung eines Gefässes. 241, 341.
p Flüssigkeitsdruck für die Flächeneinheit. 166.
p_0 Atmosphärendruck. 226.
p_0 Druck am Wasserspiegel eines Gefässes. 240.
p_1 Druck des Gases in einem Gefässe. 341.
p' Druck eines Gases an der Ausflussmündung. 356.
q Beschleunigung eines Gefässes mit Wasser. 204.
qcm Quadratcentimeter. 8.

r Halbmesser eines Kreises. 26.
r mittlere hydraulische Tiefe. 302.
t Hebelarm einer Strebenkraft. 88.
t Schwingungsdauer eines Pendels. 153.
t Temperatur. 218.
t Wassertiefe 309.
t Zeit der Entleerung eines Gefässes. 260.
t_1 Zeit der Füllung und Entleerung von Schleusen. 267.
u Abstand einer Last vom linken Auflager eines Trägers. 88.
u Geschwindigkeit beim Stofse im Augenblick der stärksten Formänderung. 136.
u lothrechte Ordinate des Seilecks. 32.
u veränderliche Querschnittsbreite. 41.
u von der Flüssigkeit berührter Umfang des Röhren- oder Kanal-Querschnitts. 287, 301.
u_1 Abstand einer Last vom rechten Auflager eines Trägers. 88.
v Einheitsraum (spec. Volumen). 212.
v veränderliche Querschnittshöhe. 40.
v_0 Geschwindigkeit im Wasserspiegel eines Flusses. 313.
v und v_1 Geschwindigkeiten nach dem Stofse. 136.
w Abstand des Schnittpunktes der Gurtrichtungen (an einer Schnittstelle eines Trägers) von der linken Auflager-Lothrechten. 88.
w Ausflussgeschwindigkeit. 238.
y Stauhöhe. 326.
z Eintauchungstiefe. 202.
z Widerstandshöhe von Röhren und Kanälen. 287, 318.
z Zugspannung an der Elasticitätsgrenze. 6.
z_0 Druckhöhe des Schwerpunkts einer Seitenöffnung. 245.

α Ausdehnungsziffer der Gase. 219.
α Biegungswinkel. 44.
α Einschnürungsziffer. 249, 342.
α Gefällverhältnis einer Kanal- oder Flussstrecke. 301.
α Knickziffer. 65.
β Widerstandsziffer von Röhren und Kanälen. 287, 302.
γ Dichte eines Gases. 212.
γ Dichte eines Körpers. 97.
γ Gleitung. 16.
ε Dehnung. 5.
ε Neigung einer Ebene gegen einen Wasserstrahl oder Wasserstrom. 281, 337.
ε Winkelbeschleunigung. 105, 154.
ζ_0 Widerstandsziffer der Reibung des Wassers im Gefässe. 255.
η und η_1 Wirkungsgrad des Stofses. 143, 145.
ϑ Neigungswinkel. 203.
ϑ Verdrehungswinkel. 69.
λ Länge eines Faches im Fachwerk. 77.
λ Widerstandsziffer kreisförmiger Röhren. 287, 358.
μ auf einen Abstand α bezogene Masse. 151.
μ Ausflussziffer. 249, 342.
μ_{pk} Ausflussziffer bei unvollständiger Einschnürung für kreisförmige Öffnung. 252.
μ_{pr} desgl. für rechteckige Öffnung. 252.
μ_{uk} Ausflussziffer bei unvollkommener Einschnürung für kreisförmige Öffnung. 253.
μ_{ur} desgl. für rechteckige Öffnung. 253.
ρ Krümmungshalbmesser der Biegungslinie. 20, 43.
σ Längsspannung. 5, 6.
σ' und σ'' stärkste Zug- und Druckspannung an einem Querschnitte. 22, 23.

τ Schubspannung. 16.
φ Böschungswinkel einer Kanalwand 310.
φ Geschwindigkeitsziffer. 248, 342.
ψ_1 Winkelgeschwindigkeit nach dem Stofse. 154.
ω Einspannungswinkel. 45.
ω Winkelgeschwindigkeit. 101, 206.
ω_1 Winkelgeschwindigkeit vor dem Stofse. 154.

$\mathfrak{A}$ Arbeit. 107.
$\mathfrak{J}$ geometrisches Trägheitsmoment einer Schwimmfläche. 200.
$\mathfrak{M}$ Biegungsmoment. 22.
$\mathfrak{M}$ Standsicherheitsmoment 199.
$\mathfrak{M}$ Verdrehungsmoment. 69.
$\mathfrak{M}_1$ Einspannungsmoment. 53.
$\mathfrak{W}$ Widerstandsmoment eines Querschnitts. 23.

$\mathfrak{c}_1$ Geschwindigkeit des Schwerpunkts vor dem Stofse. 154.
$\mathfrak{p}$ hydraulischer Druck. 269.
$\mathfrak{p}$ Winddruck auf 1 ^{qm}. 365.
$\mathfrak{v}_1$ Geschwindigkeit des Schwerpunkts nach dem Stofse. 154.

Alphabetisches Inhaltsverzeichnis.

(Die Ziffern geben die Seitenzahlen an.)

Berichtigungen.

S. 77, Zeile 4 von oben setze „oder Querträger" hinter „Zwischenbalken".
S. 86, Fussnote; in Zeile 3 setze 1839 statt 1837; in Zeile 6 —: 1837 statt 1839.
S. 212, Zeile 11 von oben setze „ihrer" und „ihres" statt „seiner" und „seines".

